Sur la stabilité de la surconvergence par l'image directe d'un morphisme propre et lisse

Daniel Caro *

Résumé

We prove a version on the formal side of Berthelot's conjecture on the preservation of overconvergence under the direct image by a smooth proper morphism of varieties over a perfect field of characteristic $p > 0$.

Table des matières

Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0. Soit $b_0 : Y' \to Y$ un morphisme propre et lisse de k-variétés, i.e., de k-schémas séparés et de type fini. Berthelot conjectura en 1986 dans [Ber86, 4.3] que l'image directe par b_0 du F-isocristal surconvergent sur Y' *constant*, i.e la cohomologie relative rigide $\mathbb{R}b_{0\,\mathrm{rig}*}(Y'/K)$, a pour faisceaux de cohomologie des F-isocristaux surconvergents sur Y. Cette conjecture avait été validée par Berthelot dans le cas relevable lorsque Y est lisse (voir [Ber86, 4, Théorème 5]). Plus précisément, il a vérifié sa conjecture lorsqu'il existe un morphisme $a : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et un ouvert $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tels que $a^{-1}(\mathfrak{Y}) \to \mathfrak{Y}$ soit un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant b_0. La preuve de ce cas repose sur le théorème de finitude de Kiehl pour les morphismes propres en géométrie analytique rigide.

Ensuite, dans [Tsu03, 4], Tsuzuki a étendu cette conjecture du cas constant au cas général de la manière suivante (en fait la base $\mathcal{V}$ peut être plus généralement remplacée par un $\mathcal{V}$-schéma formel) :

*L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

soient $a_0 : X' \to X$ un morphisme propre de k-variétés, Y un ouvert de X tel que le morphisme induit $b_0 : Y' := a_0^{-1}(Y) \to Y$ soit de plus lisse. Alors, pour tout (F-)isocristal E' sur Y' surconvergent le long de $X' \setminus Y'$, les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{R}a_{0\,\mathrm{rig}*}(E'/K)$ sont des (F-)isocristaux sur Y surconvergents le long de $X \setminus Y$.

On la nommera « conjecture de Berthelot avec coefficients ». Rappelons que lorsque X est propre, $\mathbb{R}a_{0\,\mathrm{rig}*}(E'/K)$ ne dépend canoniquement que de b_0 et se note par conséquent $\mathbb{R}b_{0\,\mathrm{rig}*}(E'/K)$. Via un théorème de changement de base de la cohomologie rigide relative, Tsuzuki a validé cette conjecture dans le contexte suivant :

soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés de type fini, X un sous-schéma fermé de la fibre spéciale de $\mathcal{P}$, Y un ouvert de X, $X' := f^{-1}(X)$, $Y' := f^{-1}(Y)$ tels que f soit lisse au voisinage de Y' et $\mathcal{P}$ soit lisse au voisinage de Y. Dans ce cas, pour tout (F-)isocristal E' sur Y' surconvergent le long de $X' \setminus Y'$, les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{R}f_{\mathrm{rig}*}(E'/K)$ sont des (F-)isocristaux sur Y surconvergent le long de $X \setminus Y$ (voir les théorèmes [Tsu03, 4.1.1 et 4.1.4] de Tsuzuki).

Plus récemment, dans le cas où $\mathcal{V}$ est modérément ramifié, Étesse a validé cette conjecture de Berthelot avec coefficients dans le cas absolu (i.e. X est propre) si l'une des deux conditions est validée : b_0 est relevable sur $\mathcal{V}$ ou Y' est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur Y (voir [Ete08]).

On dispose enfin de deux autres versions (l'une est plus forte que l'autre) de Shiho de cette conjecture de Berthelot avec coefficients (voir les deux conjectures [Shi07a, 5.3 et 5.5]). Dans [Shi07b], Shiho résout sa conjecture la plus faible. Enfin, lorsque b_0 n'est plus forcément propre et lisse, Shiho a vérifié la surcohérence générique (i.e., devient un isocristal surconvergent sur un ouvert dense) de la cohomologie rigide relative avec coefficients.

Nous nous proposons d'apporter un éclairage nouveau sur ces questions via la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques construits par Berthelot. Rappelons d'abord comment la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques est reliée à la théorie des F-isocristaux surconvergents.

Soit Y une k-variété lisse. Nous bénéficions d'une équivalence entre la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y/K)$ des F-isocristaux surconvergents sur Y et la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ des F-isocristaux surcohérents sur Y. Les objets de la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ sont des F-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur Y vérifiant certaines hypothèses de finitude (voir [Car07] pour le cas général ou [Car06a] pour le cas de la désingularisation idéale). Pour obtenir cette équivalence, nous utilisons le morphisme de spécialisation de la fibre spéciale au sens de Raynaud (l'espace analytique rigide canoniquement associé) d'un $\mathcal{V}$-schéma formel sur ce $\mathcal{V}$-schéma formel. En effet, ce morphisme de spécialisation permet de relier le monde de la géométrie analytique rigide dans lequel vivent les isocristaux surconvergents et celui de la géométrie formelle dans lequel vivent les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Via cette équivalence, nous obtenons une « version formelle » de la conjecture de Berthelot. On remarquera que la version analytique rigide est a priori plus forte puisqu'elle implique la version formelle par application du foncteur image directe par le morphisme de spécialisation.

Nous prouvons dans cet article une « version relative formelle » de la conjecture de Berthelot.

Plus précisément, soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y,X) soit proprement d-plongeable (voir 1.1.5), i.e., tels qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ propre et lisse, un diviseur T de P et une immersion (non nécessairement fermée) $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ vérifiant $Y = X \setminus T$. Afin de donner un sens formel à la conjecture de Berthelot, nous construisons dans ce papier la catégorie des F-isocristaux surcohérents sur (Y,X). Lorsque X est lisse, la structure de Frobenius n'est plus indispensable, i.e., nous pouvons de plus définir la catégorie des isocristaux surcohérents sur (Y,X). Lorsque X est propre et Y est lisse, on retrouve la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ des F-isocristaux surcohérents sur Y, cette catégorie de coefficients ne dépendant pas de la compactification propre X.

On construit la catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ des F-complexes surholonomes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur (Y,X) ainsi que la catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ des F-complexes surholonomes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur (Y,X) dont les espaces de cohomologie sont des F-isocristaux surcohérents sur (Y,X). Ces catégories ne dépendent pas a priori du choix du plongement $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et du diviseur T de P. Pour vérifier cette indépendance canonique (en fait, pour le cas plus aisé où X est lisse, nous n'en aurons pas besoin), nous prouvons la propriété suivante de stabilité de la surholonomie : pour tout morphisme $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, pour tout F-complexe surholonome $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{P}'$ à support propre sur $\mathcal{P}$, l'image directe de $\mathcal{E}'$ par f est un F-complexe surholonome sur $\mathcal{P}$ (voir 3.1.3).

Nous établissons dans ce papier la version formelle suivante (voir 3.3.3) de la conjecture de Berthelot : soient $(Y',X'),(Y,X)$ deux couples de k-variétés proprement d-plongeables, $a_0 : X' \to X$ un morphisme propre tels que

$a_0^{-1}(Y) = Y'$ et tels que le morphisme induit $Y' \to Y$ soit propre et lisse. Alors, le foncteur image directe par a_0 se factorise sous la forme :

$$a_{0+} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}).$$

Lorsque X et X' sont lisses, ce résultat reste valable sans structure de Frobenius (voir 2.3.1).

Remerciements. Je remercie vivement Kiran Kedlaya pour une question posée lors de la conférence en l'honneur de Gilles Christol qui m'a incitée à m'intéresser à cette conjecture de Berthelot via les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Je remercie Jean-Yves Etesse pour une question analogue lors de cette même conférence. Je remercie Nobuo Tsuzuki pour les discussions, notamment sur la comparaison entre les versions formelles et rigides des conjectures de Berthelot, lors de son invitation à Sendai.

Notations. Tout au long de cet article, nous garderons les notations suivantes : soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k des caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0, d'uniformisante π. les $\mathcal{V}$-schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. On fixe $s \geq 1$ un entier naturel et F désigne la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius. Les modules sont par défaut des modules à gauche. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ désignera $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note m un entier positif. Si $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, on notera par des lettres droites les fibres spéciales et $f_0 : X' \to X$ sera le morphisme induit. Sauf mention du contraire, on supposera (sans nuire à la généralité) les k-schémas réduits. En général, lorsqu'un diviseur est vide, on évite de l'indiquer, e.g. dans les opérations cohomologiques correspondantes.

1 Compléments sur les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

1.1 Rappels et notations

Nous donnons dans cette section quelques rappels sur les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Nous définissons aussi quelques catégories de $\mathcal{D}$-modules nous utiliserons par la suite.

Donnons d'abord quelques précisions sur les notations que nous adopterons concernant les foncteurs image directe et image inverse extraordinaire.

1.1.1 (Image inverse extraordinaire)**.** Soient $f,\ f' : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ deux morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses tels que $f_0 = f'_0$. On dispose des foncteurs images inverses extraordinaires $f^!,\ f'^! : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$. Via [Ber00, 2.1.5], on bénéficie de l'isomorphisme canonique de foncteurs de la forme $f^! \xrightarrow{\sim} f'^!$. Ces isomorphismes vérifient les formules de transitivité usuelles. De même, pour m assez grand, i.e. $p^m > e/(p-1)$ avec e l'indice de ramification de $\mathcal{V}$, en désignant par $f^{(m)!}$ et $f'^{(m)!}$ les foncteurs $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}) \to D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}'})$ images inverses extraordinaires de niveau m par f et f', on dispose de l'isomorphisme de la forme $f^{(m)!} \xrightarrow{\sim} f'^{(m)!}$. De tels (et plus généralement avec des singularités surconvergentes le long d'un diviseur) isomorphismes seront notés τ.

1.1.2 (Image directe)**.** Soit $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Les foncteurs images directes par f de niveau m préservent la cohérence et seront notés (s'il n'y a pas de confusion possible entre les deux) $f^{(m)}_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}'}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}})$, $f^{(m)}_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Ces deux foncteurs commutent à $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, i.e., pour tout $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}'})$, $f^{(m)}_+(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} f^{(m)}_+(\mathcal{E}')_{\mathbb{Q}}$. S'il n'y a pas de risque de confusion et pour alléger les notations, nous écrirons f_+ au lieu de $f^{(m)}_+$. Le foncteur image directe par f sera noté $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}'}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}})$, de même avec des $\mathbb{Q}$. Si $f' : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ est un second morphisme tel que $f'_0 = f_0$, on dispose de plus des isomorphismes de recollement $f_+ \xrightarrow{\sim} f'_+$ satisfaisant aux formules de transitivité usuelles.

1.1.3 (Foncteur cohomologique local)**.** Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, X un sous-schéma fermé de P. On notera par $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X$ le foncteur cohomologique local défini dans [Car04, 2] (conjecturalement égal à celui défini par Berthelot).

Lorsqu'il existe un morphisme $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses dont la réduction induisant modulo π est l'immersion fermée canonique $X \hookrightarrow P$, d'après le dernier point de [Car08, 1.15], $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X \xrightarrow{\sim} u_+ u^!$.

1.1.4. Soit $v : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Pour tout $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$, via un calcul en coordonnées locales, on obtient l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}^0 v^{(m)!}(v^{(m)}_{+}(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$. Cet isomorphisme est à la base des procédures de recollement de 1.2.

Par contre, on prendra garde au fait que l'analogue arithmétique à niveau m constant du théorème de Kashiwara est inexact. Plus précisément, un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$-module cohérent à support dans Y n'est pas forcément dans l'image essentielle du foncteur $v^{(m)}_{+} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}})$. Cette remarque explique le pourquoi des définitions de 1.2.

La définition et le lemme qui suivent seront commodes pour traiter la suite de ce papier, par exemple afin de définir les catégories de F-isocristaux partiellement surconvergents.

Définition 1.1.5.

– Une k-variété Y est « plongeable » s'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ propre et lisse et une immersion $Y \hookrightarrow \mathcal{P}$.
– Une k-variété Y est « d-plongeable » s'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ propre et lisse, un diviseur T de P et une immersion fermée $Y \hookrightarrow \mathfrak{U}$, où $\mathfrak{U}$ désigne l'ouvert $\mathcal{P} \setminus T$ de $\mathcal{P}$.
– Un « couple de k-variétés d-plongeable » (Y,X) est la donnée d'une k-variété X, d'un ouvert Y de X tels qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ séparé et lisse, un diviseur T de P et une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ vérifiant $Y = X \setminus T$.
– Un « couple de k-variétés proprement d-plongeable » (Y,X) est la donnée d'une k-variété X, d'un ouvert Y de X tels qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ propre et lisse, un diviseur T de P et une immersion (non nécessairement fermée) $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ vérifiant $Y = X \setminus T$.
– Soient (Y',X'), (Y,X) deux couples de k-variétés d-plongeables (resp. proprement d-plongeables). Un morphisme $a_0 : (Y',X') \to (Y,X)$ de couples de k-variétés d-plongeables (resp. de couples de k-variétés proprement d-plongeables) est un morphisme de k-variétés (encore noté par abus de notation) $a_0 : X' \to X$ tel que $Y' \subset a_0^{-1}(Y)$. Le morphisme $a_0 : (Y',X') \to (Y,X)$ est *propre* lorsque le morphisme sous-jacent $X' \to X$ est propre.

Lemme 1.1.6. *Soit $a_0 : (Y',X') \to (Y,X)$ un morphisme de couples de k-variétés proprement d-plongeables. Il existe alors un diagramme commutatif de la forme :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'_0"] \arrow[d, "a_0"'] & \mathcal{P}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \widetilde{\mathcal{P}}' \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ X \arrow[r, "u_0"] & \mathcal{P} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{P}}, \end{tikzcd} \tag{1.1.6.1}$$

où $\widetilde{f}$ est un morphisme propre et lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses, u_0 et u'_0 sont des immersions fermées, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) est un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{P}}'$) et tels qu'il existe un diviseur $\widetilde{T}$ de $\widetilde{P}$ (resp. un diviseur $\widetilde{T}'$ de $\widetilde{P}'$) vérifiant $Y = X \setminus \widetilde{T}$ (resp. $Y' = X' \setminus \widetilde{T}'$) et $\widetilde{T}' \supset \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$.

– *Si $Y' = a_0^{-1}(Y)$ alors on peut choisir de plus $\widetilde{T}' = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$.*
– *Si a_0 est propre, le diagramme de droite de 1.1.6.1 peut alors être choisi cartésien.*

Démonstration. Soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\widetilde{T}$ un diviseur de $\widetilde{P}$ tels qu'il existe une immersion $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus \widetilde{T}$. On procède de même avec des primes. Posons $\widetilde{\mathcal{P}}'' := \widetilde{\mathcal{P}} \times \widetilde{\mathcal{P}}'$, $\widetilde{q} : \widetilde{\mathcal{P}}'' \to \widetilde{\mathcal{P}}$ et $\widetilde{q}' : \widetilde{\mathcal{P}}'' \to \widetilde{\mathcal{P}}'$ les projections canoniques, $\widetilde{T}'' := \widetilde{q}'^{-1}(\widetilde{T}') \cup \widetilde{q}^{-1}(\widetilde{T})$. On dispose de l'immersion canonique $X' \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}''$ induite par le graphe de a_0 et les immersions $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$, $X' \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}'$. Comme $Y' = X' \setminus \widetilde{T}''$, quitte à remplacer $\widetilde{\mathcal{P}}'$ par $\widetilde{\mathcal{P}}''$ et $\widetilde{T}'$ par $\widetilde{T}''$, on peut supposer qu'il existe un morphisme $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{P}}' \to \widetilde{\mathcal{P}}$ propre, lisse, prolongeant a_0 et tel que $\widetilde{T}' \supset \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$. Soit $\mathcal{P}$ un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$ contenant X tel que l'immersion $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ canoniquement induite soit fermée. Comme $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P}) \supset X'$, il existe un ouvert $\mathcal{P}'$ inclus dans $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P})$ contenant X' tel que l'immersion induite $X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ soit fermée. Ainsi, $\widetilde{f}$ induit le morphisme $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$.

-Lorsque $Y' = a_0^{-1}(Y)$, comme $Y' = X' \setminus (\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T}))$, alors on peut choisir $\widetilde{T}' = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$.

-Enfin, lorsque a_0 est propre, le morphisme $X' \to \mathcal{P}$ l'est aussi. Comme le morphisme $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ induit par $\widetilde{f}$ est propre, il en résulte que l'immersion $X' \hookrightarrow \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P})$ est fermée. Dans ce cas $\mathcal{P}'$ peut être choisi égal à $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P})$.

□

Nous verrons dans les prochains chapitres que les catégories définies ci-dessous dans 1.1.7 et 1.1.8 sont sous certaines conditions indépendants des choix faits.

Notations 1.1.7. Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P, X un sous-schéma fermé de P, $\mathfrak{U}$ l'ouvert de $\mathcal{P}$ complémentaire de T. On suppose que $Y := X \setminus T$ est un k-schéma lisse. Notons que comme Y est lisse, on dispose du foncteur canonique pleinement fidèle $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow \mathfrak{U},+}$ de la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Isoc}(Y/K)$ des $(F\text{-})$isocristaux convergents sur Y dans celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules surcohérents (et même surholonomes d'après 2.1.6) à support dans Y (voir [Car05] ou la description de 1.1.18 dans le cas particulier où le diviseur est vide).

– Nous avons défini dans [Car06a, 6.2.1] la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ des $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans X tels que $\mathcal{E}$ et $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ soient $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents et $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow \mathfrak{U},+}$. Le foncteur $\mathbb{D}_T$ désigne le foncteur dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire au sens de Virrion (e.g. voir [Vir00]). Grâce à [CT08], un élément de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ est aussi un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surholonome. Remarquons que sa preuve nécessite des modules munis d'une structure de Frobenius. Cette structure de Frobenius est utilisée notamment dans [Car06a, 6.3.1] ou 2.1.8 (pour le cas où X est non lisse).
– On note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes dont les espaces de cohomologie appartiennent à $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$.
  Lorsque T est vide, on notera plutôt $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathcal{P},X/K)$ au lieu de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},X/K)$ (rappelons que l'on n'indique pas T lorsqu'il est vide).

Notations 1.1.8. Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P, X un sous-schéma fermé de P.

• On note $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X,\mathcal{P},T)$, la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans X.

• On note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P},T,X/K)$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes à support dans X.

• Pour la notion de surholonomie, on se reportera à [Car08]. On notera $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$ la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes $\mathcal{E}$ à support dans X tels que le morphisme canonique $\mathcal{E}\to\mathcal{E}({}^{\dagger}T)$ soit un isomorphisme.

• On désigne par $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes surholonomes.

• On dispose du foncteur extension $({}^{\dagger}T)=\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}-\ :\ (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})\to(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. On note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes $\mathcal{E}$ tels que le morphisme $\mathcal{E}\to\mathcal{E}({}^{\dagger}T)$ canonique de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ soit un isomorphisme.

• On note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes à support dans X.

• Lorsque le diviseur T est vide, on omet de l'indiquer dans les précédentes catégories.

Remarques 1.1.9. – Avec les notations de 1.1.8, la catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ est canoniquement équivalente à la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ des $(F\text{-})$complexes $\mathcal{F}$ tels que $oub_T(\mathcal{F})\in(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$, où oub_T est le foncteur oubli canonique $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})\to(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.

Démonstration. Notons $(F\text{-})\mathfrak{C}$ cette seconde catégorie. Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$, on obtient par définition l'isomorphisme $\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}({}^{\dagger}T)$. D'où : $oub_T(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))\in(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Le foncteur $({}^{\dagger}T)$ induit alors la factorisation : $({}^{\dagger}T):(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})\to(F\text{-})\mathfrak{C}$.
D'un autre côté, soit $\mathcal{F}$ un objet de $(F\text{-})\mathfrak{C}$. Comme $\mathcal{F}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent et $oub_T(\mathcal{F})$ est (en particulier) $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-cohérent, on déduit de [Ber96, 4.3.12] que le morphisme canonique $oub_T(\mathcal{F})\to({}^{\dagger}T)(oub_T(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme. On obtient ainsi la factorisation : $oub_T:(F\text{-})\mathfrak{C}\to(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$.
En fait, nous avons vérifiés que les foncteurs oub_T et $({}^{\dagger}T)$ induisent alors les équivalences quasi-inverses : $oub_T:(F\text{-})\mathfrak{C}\cong(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ et $({}^{\dagger}T):(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})\cong(F\text{-})\mathfrak{C}$.

□

– Il résulte du premier point que $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ est une sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P},T,X/K)$.

1.1.10 (Théorème de Berthelot-Kashiwara). La version arithmétique due à Berthelot du théorème de Kashiwara s'écrit de la façon suivante (les versions surholonomes s'en déduisent de manière immédiate) : soient $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, T un diviseur de X tel que $T \cap X$ soit un diviseur de X.

1. Pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ à support dans X, pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$, pour tout entier $j \neq 0$, $\mathcal{H}^j u_+(\mathcal{E}) = 0$ et $\mathcal{H}^j u^!(\mathcal{F}) = 0$.
2. Les foncteurs u_+ et $u^!$ induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans X et celle des $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (resp. entre $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathfrak{X},T\cap X,X/K)$, resp. entre $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathfrak{X},T\cap X,X/K)$, resp. entre les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathfrak{X},T\cap X,X/K)$).

Nous étudierons dans les prochains chapitres (e.g. 3.2.2) une variante relative de l'indépendance (par rapport à une compactification propre choisie et à son immersion dans un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse)

-des catégories de complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur une k-variété (voir 1.1.11 et 1.1.12),

-ainsi que des opérations cohomologiques aux niveaux des k-variétés (voir 1.1.15).

Dans le cas relatif, il s'agira de considérer des morphismes de couple de k-variétés proprement d-plongeables. Pour mémoire, rappelons ces indépendances dans le cas absolu (i.e. la compactification partielle X de Y est propre).

Définition 1.1.11. Soient Y une k-variété plongeable (voir 1.1.5). Choisissons $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, X et T deux sous-schémas fermés de P tels que $Y = X \setminus T$.

La catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K})$ désigne la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ des F-complexes $\mathcal{E}$ à support dans X tels que $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}({}^\dagger T)$. Cette catégorie ne dépend canoniquement pas du choix du plongement $Y \hookrightarrow \mathcal{P}$ ni de X et T (voir [Car08, 4.18]). Elle correspond donc canoniquement à des coefficients sur Y/K. Si aucune confusion n'est à craindre concernant la base $\mathcal{V}$, on pourra omettre d'indiquer K en la notant $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_Y)$.

1.1.12 (Indépendance de la compactification : cas absolu). Soient Y une k-variété d-plongeable (voir 1.1.5). Choisissons $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, X un sous-schéma fermé de P, T un diviseur de P tels que $Y = X \setminus T$.

• Comme $\mathcal{P}$ est propre, d'après [Car08], la catégorie $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend pas des choix faits mais seulement de Y (et de $\mathcal{V}$ fixé dès le départ). On la note alors sans ambiguïté $F\text{-}\mathrm{Surhol}(Y/K)$. Ses objets sont les *$F$-$\mathcal{D}_Y$-modules arithmétiques surholonomes*.

• Supposons à présent que Y soit de plus lisse. Comme $\mathcal{P}$ est propre, la catégorie $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend que de Y. On la note donc sans ambiguïté $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ (voir [Car06a]). Ses objets sont *les F-isocristaux surcohérents sur Y*.

1.1.13. On reprend les notations de 1.1.12 et on suppose Y lisse.

– D'après [Car07, 2.3.1], on dispose de l'équivalence de catégories $\mathrm{sp}_{Y+} : F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$, où $F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ désigne la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur Y.
  On a déduit de cette équivalence de catégories que la catégorie $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ est égale à la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules surcohérents $\mathcal{E}$ à support dans X tels que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ soit associé à un isocristal convergent sur Y, i.e., soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow\mathfrak{U},+}$ (voir [Car07, 2.3.2]). En d'autres termes, l'hypothèse que $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ soit $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent est superflue (lorsque $\mathcal{P}$ est propre) dans la définition des objets de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$. Cette caractérisation de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ nous a permis de dévisser les F-complexes surcohérents en F-isocristaux surconvergents (voir [Car07, 3.1.2]). Grâce à [CT08], cela implique que (dans le cas absolu avec structure de Frobenius), les F-complexes surcohérents sont en fait surholonomes.
– D'après [CT08], on dispose de l'inclusion : $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) \subset F\text{-}\mathrm{Surhol}(Y/K)$. Ce résultat est une conséquence du théorème de réduction semi-stable de Kedlaya (voir [Ked07, Ked08, Keda, Kedb]). Rappelons que, dans le cas des F-isocristaux surconvergents *unités*, ce théorème de la réduction semi-stable fût vérifier par Tsuzuki (voir [Tsu02]).
– Tous ces résultats se généralise et restent valables pour toute k-variété lisse Y : il s'agit de procéder par recollement (voir [Car07] et [CT08]).

Remarques 1.1.14. • Soit Y une k-variété d-plongeable. On bénéficie alors, pour tout entier l, du foncteur canonique $\mathcal{H}^l : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K}) \to F\text{-}\mathrm{Surhol}(Y/K)$.

En effet, soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, T un diviseur de P et X un sous-schéma fermé de P tels que $Y = X \setminus T$. Alors, d'après 3.1.2, pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K})$, $\mathcal{H}^l(\mathcal{E})$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surholonome à support dans X et tel que $\mathcal{H}^l(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^l(\mathcal{E})({}^{\dagger}T)$.

• On remarquera dans le précédent point que le fait que T soit un diviseur est indispensable pour obtenir la commutation $({}^{\dagger}T) \circ \mathcal{H}^l \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^l \circ ({}^{\dagger}T)$. Si Y est seulement une k-variété plongeable, non seulement la catégorie F-Surhol(Y/K) n'est pas a priori bien définie (i.e. dépend a priori des choix faits et ne dépend que de Y) mais en plus, on ne dispose pas de la factorisation $\mathcal{H}^l : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K}) \to F\text{-Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Par exemple, si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, si T est un sous-schéma lisse de codimension 2 dans P et si $Y = P \setminus T$, alors $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K})$ mais $\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}} \notin F\text{-Surhol}(\mathcal{P}, T, P/K)$.

1.1.15 (Images directes, images inverses : cas absolu)**.** Soit $b_0 : Y' \to Y$ un morphisme de k-variétés plongeables respectivement dans des $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Quitte à remplacer $\mathcal{P}'$ par $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}$, on peut supposer que b_0 se prolonge en un morphisme propre et lisse $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$.

– On bénéficie du foncteur image directe par le morphisme de k-variétés b_0 que l'on note $b_{0+} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y'/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K})$ (voir [Car08]). Le foncteur b_{0+} est défini en posant $b_{0+} := f_+$ (on vérifie que cela ne dépend pas du choix du prolongement f).
– On bénéficie du foncteur image inverse extraordinaire par le morphisme de k-variétés b_0 que l'on note $b_0^! : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y'/K})$ (voir [Car08]). Par définition, si X' et T' sont des sous-schémas fermés de P' tels que $Y' = X' \setminus T'$, alors $b_0^! = \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X'} \circ ({}^{\dagger}T') \circ f^!$.
  Si Y' est un ouvert de Y, pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{Y/K})$, on pose $\mathcal{E}|Y' = b_0^!(\mathcal{E})$.

Nous donnerons dans la section 1.2 une variante de niveau m (fixé) des procédés de recollement de [Car05, 2.5]. Comme nous procéderons par analogie et comme nous utiliserons aussi le cas où le niveau n'est pas fixé, rappelons quelques points de ces procédés de recollement.

1.1.16 (Recollement : cas de la compactification partielle lisse)**.** Soient X une k-variété lisse et Y un ouvert dense de X tels que (Y, X) soit d-plongeable (1.1.5). Choisissons $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P tels qu'il existe une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus T$.

D'après [Car05, 2.5.4], la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$ (voir 1.1.8) est canoniquement isomorphe à la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T \cap X)$ définie de la manière suivante : fixons $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement d'ouverts de $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{P}_{\alpha\beta} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta$, $\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\gamma$, $X_\alpha := X \cap P_\alpha$, $X_{\alpha\beta} := X_\alpha \cap X_\beta$ et $X_{\alpha\beta\gamma} := X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$. On suppose de plus que pour tout $\alpha \in \Lambda$, X_α est affine (par exemple lorsque le recouvrement $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est affine). Comme P est séparé, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, $X_{\alpha\beta}$ et $X_{\alpha\beta\gamma}$ sont donc affines.

Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda^3$, choisissons $\mathfrak{X}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{X}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma}$) des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant X_α (resp. $X_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\beta\gamma}$), $p_1^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{X}_\alpha$ (resp. $p_2^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{X}_\beta$) des relèvements de $X_{\alpha\beta} \to X_\alpha$ (resp. $X_{\alpha\beta} \to X_\beta$). Rappelons que grâce à Elkik ([Elk73] de tels relèvements existent bien.

De même, pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda^3$, on choisit des relèvements $p_{12}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\alpha\beta}$, $p_{23}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\beta\gamma}$, $p_{13}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\alpha\gamma}$, $p_1^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\alpha$, $p_2^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\beta$, $p_3^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\gamma$ induisant les morphismes canoniques au niveau des fibres spéciales.

Définition 1.1.17. Avec les notations de 1.1.16, pour tout $\alpha \in \Lambda$, donnons-nous $\mathcal{E}_\alpha$, un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^{\dagger}T \cap X_\alpha)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent.

• Une *donnée de recollement* sur $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est la donnée pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$ d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}_{\alpha\beta}}({}^{\dagger}T \cap X_{\alpha\beta})_{\mathbb{Q}}$-linéaire $\theta_{\alpha\beta} : p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha)$, ceux-ci vérifiant la condition de cocycle : $\theta_{13}^{\alpha\beta\gamma} = \theta_{12}^{\alpha\beta\gamma} \circ \theta_{23}^{\alpha\beta\gamma}$, où $\theta_{12}^{\alpha\beta\gamma}$, $\theta_{23}^{\alpha\beta\gamma}$ et $\theta_{13}^{\alpha\beta\gamma}$ sont définis par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
p_{12}^{\alpha\beta\gamma!} p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "p_{12}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\beta})"] & p_2^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\beta) \arrow[d, dashed, "\theta_{12}^{\alpha\beta\gamma}"] & p_{23}^{\alpha\beta\gamma!} p_2^{\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\gamma) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "p_{23}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\beta\gamma})"] & p_3^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\gamma) \arrow[d, dashed, "\theta_{23}^{\alpha\beta\gamma}"] & p_{13}^{\alpha\beta\gamma!} p_2^{\alpha\gamma!}(\mathcal{E}_\gamma) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "p_{13}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\gamma})"] & p_3^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\gamma) \arrow[d, dashed, "\theta_{13}^{\alpha\beta\gamma}"] \\
p_{12}^{\alpha\beta\gamma!} p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\alpha), & p_{23}^{\alpha\beta\gamma!} p_1^{\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\beta) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & p_2^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\beta), & p_{13}^{\alpha\beta\gamma!} p_1^{\alpha\gamma!}(\mathcal{E}_\alpha) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\alpha),
\end{tikzcd} \tag{1.1.17.1}$$

où les isomorphismes de la forme τ désigne les isomorphismes canoniques de recollement (voir 1.1.1).

• On construit la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},T\cap X/K)$ (resp. $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},T\cap X/K))$ de la manière suivante :

- un objet est une famille $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^\dagger T\cap X_\alpha)_\mathbb{Q}$-modules cohérents (resp. de $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^\dagger T\cap X_\alpha)_\mathbb{Q}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^\dagger T\cap X_\alpha)_\mathbb{Q}$-cohérents) munie d'une donnée de recollement $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$;

- un morphisme $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\to((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ est une famille de morphismes $f_\alpha:\mathcal{E}_\alpha\to\mathcal{E}'_\alpha$ commutant aux données de recollement, i.e., telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta) \arrow[r, "\theta_{\alpha\beta}", "\sim"'] \arrow[d, "p_2^{\alpha\beta!}(f_\beta)"] & p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha) \arrow[d, "p_1^{\alpha\beta!}(f_\alpha)"] \\ p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\beta) \arrow[r, "\theta'_{\alpha\beta}", "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\alpha). \end{tikzcd} \tag{1.1.17.2}$$

• Lorsque le diviseur T est vide, on omet comme d'habitude de l'indiquer. De plus, on note $(F\text{-})\mathrm{Isoc}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ au lieu de $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$.

1.1.18. • Nous gardons les notations de 1.1.17. D'après la preuve de [Car05, 2.5.4], on dispose des deux foncteurs quasi-inverses canoniques

$$\mathcal{L}oc:\mathrm{Coh}(X,\mathcal{P},T/K)\to\mathrm{Coh}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},T\cap X/K), \tag{1.1.18.1}$$

$$\mathcal{R}ecol:\mathrm{Coh}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},T\cap X/K)\to\mathrm{Coh}(X,\mathcal{P},T/K), \tag{1.1.18.2}$$

dont les constructions sont analogues à celles que l'on donnera au niveau m dans 1.2.4 et 1.2.5.

• La catégorie $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X/K)$ des $(F\text{-})$isocristaux surconvergents sur (Y,X) est canoniquement équivalente à $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(X,(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},T\cap X/K)$. En composant cette équivalence avec le foncteur $\mathcal{R}ecol$ de 1.1.18.2, on obtient alors le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}:(F\text{-})\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X/K)\to\mathrm{Coh}(X,\mathcal{P},T/K)$ (voir [Car05, 2.5]). Grâce à [Car06a, 6.1.4], on vérifie que son image essentielle est égale à $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ (notations de 1.1.7).

1.2 Recollement de niveau m sur les k-variétés lisses plongeables

Nous reprenons dans cette section les constructions de 1.1.17 et 1.1.18 en les adaptant au cas des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de niveau m (et en oubliant les diviseurs).

Nous garderons de plus les notations suivantes : on se donne $\mathfrak{U}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, Y un sous-schéma fermé lisse de U et $v_0:Y\hookrightarrow U$ l'inclusion canonique. On fixe $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement d'ouverts de $\mathfrak{U}$. On note alors $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}:=\mathfrak{U}_\alpha\cap\mathfrak{U}_\beta$, $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}:=\mathfrak{U}_\alpha\cap\mathfrak{U}_\beta\cap\mathfrak{U}_\gamma$, $Y_\alpha:=Y\cap U_\alpha$, $Y_{\alpha\beta}:=Y_\alpha\cap Y_\beta$ et $Y_{\alpha\beta\gamma}:=Y_\alpha\cap Y_\beta\cap Y_\gamma$. On suppose de plus que pour tout $\alpha\in\Lambda$, Y_α soit affine. Comme U est séparé, pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$, $Y_{\alpha\beta}$ et $Y_{\alpha\beta\gamma}$ sont alors affines.

Pour tout triplet $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Lambda^3$, choisissons $\mathcal{Y}_\alpha$ (resp. $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}$) des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant Y_α (resp. $Y_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta\gamma}$). Soient $p_1^{\alpha\beta}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta}\to\mathcal{Y}_\alpha$ (resp. $p_2^{\alpha\beta}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta}\to\mathcal{Y}_\beta$) des relèvements de $Y_{\alpha\beta}\to Y_\alpha$ (resp. $Y_{\alpha\beta}\to Y_\beta$). De même, pour tout triplet $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Lambda^3$, on choisit des relèvements $p_{12}^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$, $p_{23}^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_{\beta\gamma}$, $p_{13}^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_{\alpha\gamma}$, $p_1^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_\alpha$, $p_2^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_\beta$, $p_3^{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\to\mathcal{Y}_\gamma$, $v_\alpha:\mathcal{Y}_\alpha\hookrightarrow\mathfrak{U}_\alpha$, $v_{\alpha\beta}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta}\hookrightarrow\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ et $v_{\alpha\beta\gamma}:\mathcal{Y}_{\alpha\beta\gamma}\hookrightarrow\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}$ induisant les morphismes canoniques au niveau des fibres spéciales. Tous ces relèvements seront supposés fixés par la suite.

Définition 1.2.1. Pour tout $\alpha\in\Lambda$, donnons-nous $\mathcal{E}_\alpha$, un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent. On appelle *donnée de recollement* sur $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, la donnée pour tous $\alpha,\beta\in\Lambda$ d'un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_{\alpha\beta}}$-linéaire $\theta_{\alpha\beta}\ :\ p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta)\xrightarrow{\sim}p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha)$, ceux-ci vérifiant la condition de cocycle : $\theta_{13}^{\alpha\beta\gamma}=\theta_{12}^{\alpha\beta\gamma}\circ\theta_{23}^{\alpha\beta\gamma}$, où $\theta_{12}^{\alpha\beta\gamma}$, $\theta_{23}^{\alpha\beta\gamma}$ et $\theta_{13}^{\alpha\beta\gamma}$ sont définis par les diagrammes commutatifs analogues à 1.1.17.1.

Définition 1.2.2. a) On construit la catégorie $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ de la manière suivante :

– un objet est une famille $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-modules cohérents $\mathcal{E}_\alpha$ munie d'une donnée de recollement $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$,
– un morphisme $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\to((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ est une famille de morphismes $f_\alpha:\mathcal{E}_\alpha\to\mathcal{E}'_\alpha$ commutant aux données de recollement, i.e., telle que le diagramme analogue à 1.1.17.2 soit commutatif.

b) On désigne par $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y, (\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y, (\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ des familles $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-modules cohérents topologiquement quasi-nilpotents $\mathcal{E}_\alpha$, cohérents sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\alpha}$.

Définition 1.2.3. On désigne par $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ (resp. $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$) la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$-modules cohérents $\mathcal{F}$ à support dans Y tels que, pour tout $\alpha\in\Lambda$, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent $\mathcal{E}_\alpha$ (resp. un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent topologiquement quasi-nilpotent $\mathcal{E}_\alpha$ cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\alpha}$) et un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}_\alpha}$-linéaire : $v_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}|\mathfrak{U}_\alpha$.

1.2.4. On construit le foncteur $\mathcal{L}oc^{(m)}:\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})\to\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ de la façon suivante : soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$-module cohérent appartenant à $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$. Pour tout $\alpha\in\Lambda$, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent $\mathcal{E}_\alpha$ tel que $v_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha)\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha$. Or, on dispose de l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}^0v^!_\alpha\circ v_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha)\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}_\alpha$ (voir 1.1.4). Il en résulte que $\mathcal{H}^0v^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent. On définit alors l'isomorphisme $\theta_{\alpha\beta}: p_2^{\alpha\beta!}\mathcal{H}^0v^!_\beta(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\beta)\xrightarrow{\sim} p_1^{\alpha\beta!}\mathcal{H}^0v^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha)$, comme étant l'unique flèche rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} p_2^{\alpha\beta!}\mathcal{H}^0v^!_\beta(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\beta) & \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} & \mathcal{H}^0v^!_{\alpha\beta}((\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\beta)|\mathfrak{U}_{\alpha\beta}) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{\alpha\beta}} & & \| \\ p_1^{\alpha\beta!}\mathcal{H}^0v^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha) & \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} & \mathcal{H}^0v^!_{\alpha\beta}((\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha)|\mathfrak{U}_{\alpha\beta}), \end{array} \tag{1.2.4.1}$$

où les isomorphismes horizontaux sont bien définis car les foncteurs $p_1^{\alpha\beta!}$ et $p_2^{\alpha\beta!}$ sont exactes (car $p_1^{\alpha\beta}$ et $p_2^{\alpha\beta}$ sont des immersions ouvertes). Comme lors de la preuve de [Car05, 2.5.4], on vérifie alors que le foncteur $\mathcal{L}oc^{(m)}$ est bien défini en posant

$$\mathcal{L}oc^{(m)}(\mathcal{E}) := ((\mathcal{H}^0v^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha))_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}). \tag{1.2.4.2}$$

On dispose en outre de la factorisation (notée abusivement) $\mathcal{L}oc^{(m)}:\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})\to\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$.

1.2.5. Soit $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\in\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$. Comme dans la preuve de [Car05, 2.5.4], on vérifie que la famille $(v_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ se recolle en un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$-module cohérent à support dans Y. On obtient ainsi le foncteur canonique :

$$\mathcal{R}ecol^{(m)}:\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})\to\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V}).$$

On dispose en outre de la factorisation (notée abusivement) $\mathcal{R}ecol^{(m)}:\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})\to\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$.

1.2.6. De manière analogue à la preuve de [Car05, 2.5.4] (qui est la version analogue en remplaçant « (m) » par « † »), on vérifie que les deux foncteurs $\mathcal{L}oc^{(m)}$ et $\mathcal{R}ecol^{(m)}$ induisent des équivalences quasi inverses entre les catégories $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ et $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ (resp. $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ et $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$).

Remarquons que, comme l'analogue arithmétique à niveau m constant du théorème de Kashiwara est inexact (e.g., voir 1.1.4), dans la définition de $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ ou $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ le fait que par hypothèse $\mathcal{E}|\mathfrak{U}_\alpha$ soit dans l'image essentielle de $v_{\alpha+}$ est nécessaire.

1.2.7. Désignons par $\mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{(m)}_Y)$ la catégorie des $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-modules cohérents, de même en remplaçant Y par U. On bénéficie du foncteur $-\otimes_{\mathcal{V}}k:\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})\to\mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{(m)}_U)$.

De plus, soit $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\in\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$. En identifiant $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}\otimes_{\mathcal{V}}k$ et $\mathcal{D}^{(m)}_{Y_\alpha}$, on remarque alors que la famille $(\theta_{\alpha\beta}\otimes_{\mathcal{V}}k)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ est une donnée de recollement (au sens topologique usuel) de la famille $(\mathcal{E}_\alpha\otimes_{\mathcal{V}}k)_{\alpha\in\Lambda}$. On obtient par recollement un $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-module cohérent. Ainsi, on dispose du foncteur (noté de façon légèrement abusive) $-\otimes_{\mathcal{V}}k:\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})\to\mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{(m)}_Y)$. On dispose alors du diagramme commutatif à isomorphisme canonique près de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V}) & \xrightarrow{\mathcal{R}ecol^{(m)}} & \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V}) \\ {\scriptstyle -\otimes_{\mathcal{V}}k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\otimes_{\mathcal{V}}k} \\ \mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{(m)}_Y) & \xrightarrow{v_{0+}} & \mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{(m)}_U). \end{array} \tag{1.2.7.1}$$

On dispose de même du diagramme analogue à 1.2.7.1 en remplaçant dans la première ligne « Coh » par « Cris ».

1.2.8. 1. On construit la catégorie $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ de manière analogue à $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ (voir 1.2.2) en remplaçant la notion de « $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha}$-module cohérent » par celle de « $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha,\mathbb{Q}}$-modules cohérents ». Le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ induit de cette façon le suivant $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} : \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V}) \to \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$.

2. On définit $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/K)$ la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{E}$ à support dans Y tel qu'il existe un élément $\mathring{\mathcal{E}} \in \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V})$ (voir 1.2.3) et un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}}$. Par construction, on dispose du foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} : \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/\mathcal{V}) \to \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/K)$.

3. On construit de manière analogue à respectivement 1.2.4 et 1.2.5 les foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}oc^{(m)}_{\mathbb{Q}} &: \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/K) \to \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K). \\ \mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}} &: \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \to \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,\mathfrak{U}/K). \end{aligned} \tag{1.2.8.1}$$

Ceux-ci sont quasi-inverses (cela se vérifie comme pour [Car05, 2.5.4] en remplaçant « † » par « (m) »).

4. On dispose d'un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathcal{L}oc^{(m)}_{\mathbb{Q}} \circ (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} -) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} -)\circ \mathcal{L}oc^{(m)}$ et $\mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}} \circ (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} -) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} -)\circ \mathcal{R}ecol^{(m)}$.

5. Soit $m' \geq m$ un entier. On définit le foncteur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} - : \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \to \mathrm{Coh}^{(m')}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ en posant, pour tout $\mathcal{E} := ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \in \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$,

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} \mathcal{E} := (\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{Y}_\alpha,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_\alpha,\mathbb{Q}}} \mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},$$

ce dernier étant muni de la donnée de recollement déduite par extension (via les isomorphismes de commutation de l'image inverse extraordinaire par un morphisme lisse au changement de niveau de [Ber02, 3.4.6]).

Il résulte de [Ber02, 3.5.3] que le foncteur $\mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ commute au changement de niveaux : on dispose de l'isomorphisme canonique de foncteurs $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}} -)\circ \mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ecol^{(m')}_{\mathbb{Q}} \circ (\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} -)$.

Pour mémoire (en fait nous n'aurons pas besoin de ce dernier isomorphisme par la suite), comme pour tout entier m le foncteur $\mathcal{L}oc^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ est quasi inverse de $\mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}}$, il en résulte $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} -)\circ \mathcal{L}oc^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}oc^{(m')}_{\mathbb{Q}} \circ (\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}} -)$.

6. Avec les notations de 1.1.8, on construit de même le foncteur $(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} -) : \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \to \mathrm{Coh}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. On déduit de [Ber02, 4.3.8] que l'on dispose de l'isomorphisme canonique de foncteurs : $(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}} -)\circ \mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ecol \circ (\mathcal{D}^{\dagger}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} -)$.

Cela implique au passage $(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y,\mathbb{Q}}} -)\circ \mathcal{L}oc^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}oc \circ (\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}} -)$.

1.2.9. • Dans un premier temps, supposons que Y se relève en un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{Y}$ lisse. D'après [Ber96, 4.1.4], on dispose alors d'une équivalence entre la catégorie des isocristaux convergents sur Y et celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérents. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent.

D'après [Ber90, 3.1.2], $\mathcal{E}$ est aussi $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent pour tout entier m. En particulier, $\mathcal{E}$ est topologiquement nilpotent (voir les remarques de[Ber96, 4.4.6]). D'après [Ber90, 3.1.2], il existe de plus un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}$-module cohérent topologiquement nilpotent $\mathring{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-cohérent et un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-linéaire de la forme $\mathring{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$.

Or, on dispose d'une équivalence canonique entre la catégorie des m-cristaux sur Y cohérents sur $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$ et celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}$-modules cohérents topologiquement quasi-nilpotents et $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-cohérents (voir par exemple [ÉLS97, 3.1]).

• Revenons au cas général et reprenons les notations de 1.2. Pour tout entier positif m, il découle du premier point l'inclusion $\mathrm{Isoc}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \subset \mathrm{Coh}^{(m)}(Y,(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. De plus, grâce au caractère local en Y de la catégorie des

isocristaux convergents sur Y et de celle des m-cristaux sur Y cohérents sur $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$ (voir [Ogu90, 7.5] ou la fin de la preuve de [Ber90, 3.1.2]), on vérifie que, pour tout objet $\mathcal{E} = ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ de $\mathrm{Isoc}(Y, (\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ (voir la définition dans 1.1.18), il existe un objet $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = ((\overset{\circ}{\mathcal{E}}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ de $\mathrm{Cris}^{(m)}(Y, (\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ et un isomorphisme dans $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y, (\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ de la forme $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. De plus, grâce à [Ber96, 3.4.5], quitte à quotienter $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_\alpha$ par son sous-module de p-torsion, on peut supposer les $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_\alpha$ sans p-torsion.

2 Préservation de la surconvergence partielle : cas de la compactification partielle lisse avec ou sans structure de Frobenius

Nous traitons dans ce chapitre le cas des variétés à compactification partielle lisse. Remarquons que (contrairement au cas étudié dans le prochain chapitre où la compactification n'est plus forcément lisse) nous parvenons dans ce cas à obtenir des résultats sans structure de Frobenius.

2.1 Catégorie des (F-)isocristaux partiellement surconvergents sur les k-variétés à compactification partielle lisse

Lemme 2.1.1. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé lisse de P, T, T' deux diviseurs de P tels que $T\cap X = T'\cap X$.*

On obtient alors les égalités $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) = (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T')$, $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K) = (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T', X/K)$, $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K) = (F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T', X/K)$, $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K) = (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T', X/K)$ *(voir les notations de 1.1.8),* $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) = (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', X/K)$, $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}, T, X/K) = (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}', T', X/K)$ *(voir 1.1.7).*

Démonstration. La validation de chacune des égalités étant de nature locale en $\mathcal{P}$, on peut donc supposer $\mathcal{P}$ affine. Choisissons alors $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant $X \hookrightarrow P$. De plus, comme les modules ou les complexes que nous considérons sont à support dans X, le lemme est local en X. On se ramène alors au cas où X est intègre. Dans ce cas, soit $T\cap X$ est un diviseur de X, soit T contient X. Lorsque T contient X, toutes les catégories considérées sont réduites à l'élément nul (cela résulte de [Ber96, 4.3.12]). Supposons à présent que $T\cap X$ soit un diviseur de X.

Traitons d'abord l'égalité $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) = (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T')$. Soit $\mathcal{E} \in (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$. Notons u_{T+} le foncteur image directe par u à singularités surconvergentes le long de T, i.e. le foncteur : $u_{T,+} : (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}) \to (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Dans ce cas, d'après le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), il existe un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} u_{T+}(\mathcal{F})$. Or, d'après [Car06b, 1.1.9], $u_{T+}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_{T'+}(\mathcal{F})$. Il en résulte que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T')_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Ainsi, $\mathcal{E} \in (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T')$, i.e., $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) \subset (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T')$. Par symétrie, on obtient l'inclusion inverse. Pour les trois autres égalités, on procède de la même manière en remplaçant la cohérence par la surholonomie ou/et les modules par des complexes.

Vérifions à présent l'avant-dernière égalité. Soit $\mathcal{E}$ un élément de $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Comme X est lisse, d'après 1.1.18, $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ est la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans X et dans l'image essentielle du foncteur $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ (voir [Car05]). Plus précisément, comme on dispose du relèvement u, cela signifie qu'il existe un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(^\dagger T\cap X)_{\mathbb{Q}}$-cohérent tel que $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} u_{T+}(\mathcal{F})$. Comme $T'\cap X = T\cap X$ et comme $u_{T+}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_{T'+}(\mathcal{F})$, cela implique alors que $\mathcal{E} \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', X/K)$. On obtient alors par symétrie l'avant-dernière égalité. La dernière en résulte aussitôt.

$\square$

Le lemme suivant améliore [Car04, 3.2.6] ou [Car08, 4.10] car le morphisme n'est plus supposé forcément lisse.

Lemme 2.1.2. *Soit $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, X un sous-schéma fermé lisse de P' tel que le morphisme induit $X \to P$ soit une immersion fermée, Y un ouvert de X, T un diviseur de P (resp. T' un diviseur de P') tels que $Y = X\setminus T$ (resp. $Y = X\setminus T'$).*

1. *Pour tout* $\mathcal{E} \in (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$*, pour tout* $\mathcal{E}' \in (F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$*, pour tout* $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*,*
$$\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})) = 0, \mathcal{H}^j(f_+(\mathcal{E}')) = 0.$$
2. *Les foncteurs* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ *et* f_+ *induisent alors des équivalences quasi-inverses entre les catégories* $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$ *et* $(F\text{-})\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$ *(resp. entre les catégories* $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ *et* $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$*, resp. entre les catégories* $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$ *et* $(F\text{-})\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}', T', X/K)$*, resp. entre les catégories* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T))$ *et* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X', \mathcal{P}', T'))$*).*
3. *Soient* $\mathcal{E}$ *un complexe de* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$*,* $\mathcal{E}'$ *un complexe de* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$*. Alors* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E}) \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$ *et* $f_+(\mathcal{E}') \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$*. De plus, on dispose des isomorphismes de la forme* $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$*,* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^! \circ f_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$*.*
4. *On suppose que* f *soit propre ou soit une immersion ouverte. Les foncteurs* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ *et* f_+ *induisent alors des équivalences quasi-inverses entre les catégories* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ *et* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$ *(resp. entre* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ *et* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}', T', X/K)$*, resp. entre* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ *et* $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}', T', X/K)$*).*

Démonstration. Afin d'alléger les notations, le cas avec structure de Frobenius étant analogue, nous omettrons d'indiquer « $(F\text{-})$ » dans toutes les catégories. Il ne coûte pas cher de supposer P et P' intègres. De même, comme X est lisse et comme les modules ou complexes sont à support dans X, on se ramène au cas où X intègre. Nous distinguons alors deux cas : soit Y est vide soit $T \cap X = T' \cap X$ est un diviseur de X. Le premier cas est immédiat car les catégories qui interviennent sont dans ce cas nulles. Traitons maintenant le deuxième cas. Dans ce cas $f^{-1}(T)$ est un diviseur de P'. Par 2.1.1, comme $f^{-1}(T) \cap X = T' \cap X$, on se ramène à supposer $T' = f^{-1}(T)$.

Fixons $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un recouvrement d'ouverts affines de $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{P}_{\alpha\beta} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta$, $\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\gamma$, $X_\alpha := X \cap P_\alpha$, $X_{\alpha\beta} := X_\alpha \cap X_\beta$ et $X_{\alpha\beta\gamma} := X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$, $\mathcal{P}'_\alpha := f^{-1}(\mathcal{P}_\alpha)$, $\mathcal{P}'_{\alpha\beta} := f^{-1}(\mathcal{P}_{\alpha\beta})$, $\mathcal{P}'_{\alpha\beta\gamma} := f^{-1}(\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma})$. Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda^3$, choisissons $\mathfrak{X}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{X}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma}$) des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant X_α (resp. $X_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\beta\gamma}$). Soient $u'_\alpha : \mathfrak{X}_\alpha \to \mathcal{P}'_\alpha$ (resp. $u'_{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathcal{P}'_{\alpha\beta}$, resp. $u'_{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathcal{P}'_{\alpha\beta\gamma}$) des relèvements de $X_\alpha \to P'_\alpha$ (resp. $u'_{\alpha\beta} : X_{\alpha\beta} \to P'_{\alpha\beta}$, resp. $u'_{\alpha\beta\gamma} : X_{\alpha\beta\gamma} \to P'_{\alpha\beta\gamma}$). On note $f_\alpha : \mathcal{P}'_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$ (resp. $f_{\alpha\beta} : \mathcal{P}'_{\alpha\beta} \to \mathcal{P}_{\alpha\beta}$, resp. $f_{\alpha\beta\gamma} : \mathcal{P}'_{\alpha\beta\gamma} \to \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}$) le morphisme induit par f. On pose $u_\alpha := f_\alpha \circ u'_\alpha : \mathfrak{X}_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$, $u_{\alpha\beta} := f_{\alpha\beta} \circ u'_{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathcal{P}_{\alpha\beta}$, $u'_{\alpha\beta\gamma} := f_{\alpha\beta\gamma} \circ u'_{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}$.

I) Traitons d'abord 1 et 2.

• Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$. On dispose des isomorphismes canoniques (le deuxième résulte de 1.1.3) :
$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})|\mathcal{P}'_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X_\alpha} f^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha) \xrightarrow{\sim} u'_{\alpha+} \circ u'^!_\alpha \circ f^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha) \xrightarrow{\sim} u'_{\alpha+} \circ u^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha). \tag{2.1.2.1}$$
Comme cela est local en $\mathcal{P}'$, il en résulte alors que, pour tout entier $j \neq 0$, on ait $\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})) = 0$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E}) \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$.

De plus, de manière analogue à 1.2.4, l'équivalence de catégories $\mathcal{L}oc : \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) \cong \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, T \cap X)$ de 1.1.18 est définie en posant $\mathcal{L}oc(\mathcal{E}) = (u^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha))_\alpha$, ce dernier étant muni de la donnée de recollement canonique induite via les isomorphismes τ de 1.1.1. De même avec des primes. Or, en appliquant $u'^!_\alpha$ à 2.1.2.1, via le théorème Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), on obtient l'isomorphisme canonique $u'^!_\alpha(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})|\mathcal{P}'_\alpha) \xrightarrow{\sim} u^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha)$, cet isomorphisme commutant aux données de recollement respectives. On dispose ainsi du diagramme commutatif (à isomorphisme canonique près) :
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) \arrow[r, "\mathcal{L}oc", "\cong"'] \arrow[d, "\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!"] & \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, T \cap X) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T') \arrow[r, "\mathcal{L}oc", "\cong"'] & \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, T' \cap X). \end{tikzcd} \tag{2.1.2.2}$$

• Soit $\mathcal{E}' \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$. D'après le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), comme $\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha$ est à support dans X_α, $u'^!_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^\dagger T' \cap X_\alpha)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha \xrightarrow{\sim} u'_{\alpha+} \circ u'^!_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$. Il en résulte l'isomorphisme $f_+(\mathcal{E}')|\mathcal{P}_\alpha \xrightarrow{\sim} f_{\alpha+}(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha) \xrightarrow{\sim} u_{\alpha+} \circ u'^!_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$. Comme cela est local en $\mathcal{P}$, on en déduit, pour $j \neq 0$, $\mathcal{H}^j(f_+(\mathcal{E}')) = 0$ et $f_+(\mathcal{E}') \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$.

L'équivalence de catégories $\mathcal{R}ecol : \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T\cap X) \cong \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$ de 1.1.18 est définie par $(\mathcal{E}_\alpha)_\alpha \mapsto (u'_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha))_\alpha$, où $(u'_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha))_\alpha$ est muni de la structure de recollement canonique, ce qui définit un objet de $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$ (voir [Car05, 2.5.4]). On dispose aussi du foncteur $\mathcal{R}ecol : \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T'\cap X) \cong \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$, défini par $(\mathcal{E}_\alpha)_\alpha \mapsto (u_{\alpha+}(\mathcal{E}_\alpha))_\alpha$. Il en résulte le diagramme canonique commutatif (à isomorphisme canonique près) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T\cap X) \arrow[r, "\mathcal{R}ecol", "\cong"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T) \\ \mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T'\cap X) \arrow[r, "\mathcal{R}ecol", "\cong"'] & \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T'). \arrow[u, "f_+"'] \end{tikzcd} \qquad (2.1.2.3)$$

• Comme les foncteurs $\mathcal{L}oc$ et $\mathcal{R}ecol$ sont quasi-inverses (voir 1.1.18), via les diagrammes commutatifs (à isomorphisme canonique près) 2.1.2.2 et 2.1.2.3, il en résulte que les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$ et $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}', T')$. On en déduit qu'il en ait de même entre les catégories $D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T))$ et $D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X', \mathcal{P}', T'))$.

• Concernant l'équivalence de catégories entre $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$, on procède de la même façon : il s'agit de remplacer dans la preuve respectivement $\mathrm{Coh}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T\cap X)$ par $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(X, (\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, T\cap X/K)$ et $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$ par $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (voir les notations de 1.1.17) et de même avec des primes.

• Traitons à présent l'équivalence entre les catégories $\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Un module surholonome étant cohérent, on obtient $\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K) \subset \mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$. Via le troisième point, il suffit alors de vérifier que l'on dispose des factorisations $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^! : \mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K) \to \mathrm{Surhol}(\mathcal{P}', T', X/K)$ et $f_+ : \mathrm{Surhol}(\mathcal{P}', T', X/K) \to \mathrm{Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Concernant $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$, cela découle de la stabilité de la surholonomie par image inverse extraordinaire et foncteur cohomologique local. Soit $\mathcal{E}' \in \mathrm{Surhol}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Il s'agit de prouver que $f_+(\mathcal{E}')$ est surholonome, ce qui est local en $\mathcal{P}$. Or, d'après le deuxième point, $f_+(\mathcal{E}')|\mathcal{P}_\alpha \xrightarrow{\sim} u_{\alpha+} \circ u'^{!}_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$. D'après la version surholonome du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), comme $\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha$ est surholonome et à support dans X_α, $u'^{!}_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_\alpha,\mathbb{Q}}$-module surholonome. Comme l'image directe par un morphisme propre préserve la surholonomie, il en résulte que $f_+(\mathcal{E}')|\mathcal{P}_\alpha$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}_\alpha,\mathbb{Q}}$-module surholonome. Nous avons donc établi les assertions 1 et 2.

II) Comme un complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ est isomorphe (dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$) à un complexe dont les faisceaux appartiennent à $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)$ (et de même avec des primes), 3 résulte aussitôt de 1 et 2.

III) Traitons à présent 4. Remarquons qu'il n'est pas immédiat (sauf si la conjecture 2.1.3 est validée) que les isomorphismes de 3 soient fonctoriels, ce qui complique la preuve de 4.

a) Les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ sont bien définis (i.e. induisent les factorisations indiquées dans 4).

En effet, pour le cas non respectif et dans le dernier cas respectif, cela résulte de 1, 2. Traitons à présent le premier cas respectif. Remarquons que comme il est conjectural à l'heure actuelle que la réciproque de 3.1.2.1 soit vraie, on ne peut plus cette fois-ci uiliser 1, 2. La factorisation du foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ est immédiate (par préservation de la surholonomie par image inverse extraordinaire et foncteur cohomologique local). Lorsque f est propre, l'image directe par f préserve la surholonomie, d'où la factorisation $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}', T', X/K) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Lorsque f est une immersion ouverte (ou d'ailleurs f quelconque), pour tout $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}', T', X/K)$, de manière analogue au deuxième point de la preuve du lemme, on obtient l'isomorphisme $f_+(\mathcal{E}')|\mathcal{P}_\alpha \xrightarrow{\sim} u_{\alpha+} \circ u'^{!}_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$, avec $u'^{!}_\alpha(\mathcal{E}'|\mathcal{P}'_\alpha)$ surholonome d'après le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10). Comme $u_{\alpha+}$ est une immersion fermée et comme la surholonomie est une notion locale, il en résulte que $f_+(\mathcal{E}')$ est surholonome. On dispose donc encore de la factorisation $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}', T', X/K) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$.

b) Vérifions d'abord 4 lorsque f est propre dans le cas non respectif.

b1) Comme f est propre, pour tout complexe $\mathcal{E}$ de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$, on dispose par adjonction du morphisme canonique $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ (en effet, il s'agit d'appliquer [Car06b, 1.2.10] pour les complexes parfaits $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E})$ au morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E}) \to f^!(\mathcal{E})$). Le fait que ce morphisme soit un isomorphisme est local en $\mathcal{P}$. Comme le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X_\alpha} \to Id$ est canoniquement isomorphe au morphisme d'adjonction $u'_{\alpha+} \circ u'^{!}_\alpha \to Id$ (voir 1.1.3), on obtient par transitivité du morphisme d'adjonction que la restriction à $\mathcal{P}_\alpha$ de $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe au morphisme d'adjonction $u_{\alpha+} \circ u^!_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha) \to (\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha)$. Via le théorème de Kashiwara-Berthelot (voir 1.1.10), celui-ci est un isomorphisme. Ainsi, le morphisme $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ fonctoriel en $\mathcal{E}$ est un isomorphisme.

b2) Réciproquement, soit $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Comme f est propre, on dispose par adjonction du morphisme canonique $\mathcal{E}' \to f^! \circ f_+(\mathcal{E}')$. En lui appliquant le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X$, comme $\mathcal{E}'$ est à support dans X, on obtient le morphisme canonique $\mathcal{E}' \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}')$. Le fait que ce morphisme soit un isomorphisme est local. On conclut alors de manière analogue à la preuve de b1) via le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10) que celui-ci est un isomorphisme.

On a donc établit que les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X f^!$ et f_+ entre les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$ sont quasi-inverses.

c) Supposons que f soit une immersion ouverte. Soient $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$, $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Grâce à la partie 1, on bénéficie des isomorphismes canoniques $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X \circ f^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E})$ et $f_*(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f_+(\mathcal{E}')$. On dispose des morphismes d'adjonction : $\mathcal{E} \to f_* f^*(\mathcal{E})$ et $f^* f_*(\mathcal{E}') \to \mathcal{E}'$. Il est immédiat que le morphisme $f^* f_*(\mathcal{E}') \to \mathcal{E}'$ est un isomorphisme. Pour établir que les foncteur f_* et f^* induisent des équivalences quasi-inverses entre $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}', T', X/K)$, il suffit alors de prouver que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to f_* f^*(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. Comme cela est local en $\mathcal{P}$, on se ramène à vérifier que le morphisme canonique $\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha \to f_{\alpha *} f^*_\alpha(\mathcal{E}|\mathcal{P}_\alpha)$ est un isomorphisme. D'après le théorème Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), il suffit d'établir que ce morphisme devient un isomorphisme après application du fonceur $u^!_\alpha$. Comme c'est le cas après application de f^*_α et comme $u^!_\alpha \xrightarrow{\sim} u'^!_\alpha \circ f^*_\alpha$, on en déduit le résultat.

d) Comme les catégories des cas respectifs sont des sous-catégories pleines de celles du cas non respectif, avec de plus a), on déduit alors de b) ou de c) les cas respectifs. □

Conjecture 2.1.3. Il est conjectural que le foncteur canonique $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X, \mathcal{P}, T)) \to (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ soit une équivalence de catégories. Si telle était le cas, alors l'hypothèse que f soit propre ou soit une immersion ouverte dans 2.1.2.4 deviendrait superflue. Nous pourrions alors définir les catégories correspondantes de 2.1.5 en remplaçant l'hypothèse « proprement d-plongeable » par « d-plongeable ».

Notations 2.1.4. Soient X une k-variété lisse et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit d-plongeable (1.1.5).

• Choisissons $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P tels qu'il existe une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus T$. La catégorie $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (voir 1.1.7) ne dépend ni du choix de l'immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et ni de celui du diviseur T (mais seulement du couple (Y, X)).

En effet, soit un deuxième choix $(X \hookrightarrow \mathcal{P}', T')$. Posons $\mathcal{P}'' := \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$. Soient $q : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}$, $q' : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}'$ les projections canoniques et $T'' := q^{-1}(T)$. D'après 2.1.2.2, les foncteurs q_+ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X q^!$ (resp. q'_+ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_X q'^!$) induisent alors des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}'', T'', X/K)$ (resp. $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$ et $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}'', T'', X/K)$).

• On notera alors sans ambiguïté $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$ pour désigner la catégorie $(F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (à équivalence canonique près). Ses objets sont les « F-isocristaux surcohérents sur (Y, X) ». L'équivalence de catégories de 1.1.18 s'écrit alors

$$\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +} : (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X/K) \cong (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K), \tag{2.1.4.1}$$

ne dépend canoniquement pas des choix faits et sera simplement notée $\mathrm{sp}_{(Y,X),+}$.

Notations 2.1.5. Soient X une k-variété lisse et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit proprement d-plongeable (1.1.5).

Choisissons $\widetilde{\mathcal{P}}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\widetilde{T}$ un diviseur de $\widetilde{P}$ tels qu'il existe une immersion $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus \widetilde{T}$. Soit $\mathcal{P}$ un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$ contenant X tel que l'immersion $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ canoniquement induite soit fermée. On note alors $T := P \cap \widetilde{T}$ le diviseur de P induit.

• Les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ ne dépendent pas, à isomorphisme canonique près, du choix du $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse $\widetilde{\mathcal{P}}$, de l'ouvert $\mathcal{P}$ de $\widetilde{\mathcal{P}}$, de l'immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et du diviseur $\widetilde{T}$ de $\widetilde{P}$ tels $T = P \cap \widetilde{T}$ et $Y = X \setminus \widetilde{T}$ (mais seulement de (Y, X)). On les notera alors respectivement sans ambiguïté $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$. Ses objets sont appelés les « F-complexes surholonomes (resp. cohérents) de $\mathcal{D}_{(Y,X)/K}$-modules arithmétiques » ou « les F-complexes surholonomes (resp. cohérents) de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $(Y, X)/K$ ».

Démonstration de l'indépendance. Faisons un tel second choix : soient $\widetilde{\mathcal{P}}'$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\mathcal{P}'$ un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}'$ $\widetilde{T}'$ un diviseur de $\widetilde{P}'$ tels qu'il existe une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}'$ induisant l'égalité $Y = X \setminus \widetilde{T}'$. Posons $\widetilde{\mathcal{P}}'' := \widetilde{\mathcal{P}} \times \widetilde{\mathcal{P}}'$. Soient $\widetilde{q} : \widetilde{\mathcal{P}}'' \to \widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{q}' : \widetilde{\mathcal{P}}'' \to \widetilde{\mathcal{P}}'$ les projections (propres et lisses) canoniques, $\widetilde{T}''_1 := \widetilde{q}^{-1}(\widetilde{T})$,

$\mathcal{P}''_1 := \widetilde{q}^{-1}(\mathcal{P})$, $T''_1 := \widetilde{T}''_1 \cap \mathcal{P}''_1$, $\widetilde{T}''_2 := \widetilde{q}'^{-1}(\widetilde{T}')$, $\mathcal{P}''_2 := \widetilde{q}'^{-1}(\mathcal{P}')$, $T''_2 := \widetilde{T}''_2 \cap \mathcal{P}''_2$ $\widetilde{T}'' := \widetilde{T}''_1 \cup \widetilde{T}''_2$, $\mathcal{P}'' := \mathcal{P}''_1 \cap \mathcal{P}''_2$. Notons $q : \mathcal{P}''_1 \to \mathcal{P}$ le morphisme induit $\widetilde{q}$. Comme q est propre, l'immersion $X \hookrightarrow \mathcal{P}''_1$ est fermée. De plus, $Y = X \setminus T''_1$. Comme q est propre, il résulte alors de 2.1.2.4 que les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X q^!$ et q_+ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}''_1,T''_1,X/K)$ (resp. entre $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}''_1,T''_1,X/K)$). De même, comme on dispose de l'immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}''$ et comme $Y = X \setminus T''$, en appliquant 2.1.2.4 à l'immersion ouverte $\mathcal{P}'' \subset \mathcal{P}''_1$, on obtient des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}'',T'',X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}''_1,T''_1,X/K)$ (resp. entre $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}'',T'',X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}''_1,T''_1,X/K)$). Ainsi, les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P}'',T'',X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{P},T,X/K)$ (resp. entre les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}'',T'',X/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$) sont canoniquement équivalentes. On conclut alors la preuve par symétrie (i.e. on remplace 1 par 2).

$\square$

• De la même manière, la catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend pas des choix effectués. On la désignera sans ambiguïté par $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$. Lorsque $Y = X$, on notera $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathcal{D}_{Y/K})$ au lieu de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$.

Remarques 2.1.6.
– Soient $\mathfrak{U}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, Y un sous-schéma fermé de U lisse sur k. Remarquons que grâce à [Car08, 7.3], un objet de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}})$ dont les espaces de cohomologie sont dans l'image essentielle du foncteur $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow\mathfrak{U},+}$ (voir 1.1.18) est alors un objet de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}})$ (nous n'avons pas besoin de structure de Frobenius). On dispose ainsi de l'inclusion canonique $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathcal{D}_{(Y/K})\subset (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$.
– Avec les notations de 2.1.5, si on rajoute des structure de Frobenius, on obtient plus généralement, grâce à [CT08], l'inclusion canonique $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}) \subset F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$.

2.1.7. Le lemme 2.1.8 ci-dessous qui suit sera utile pour généraliser 2.3.1 afin d'obtenir le théorème 2.3.3 (i.e., on allège l'hypothèse de propreté du morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses). Il sera aussi utilisé pour valider le théorème 3.1.3).

Lemme 2.1.8. *Soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, $u'_0 : X' \hookrightarrow P'$ une immersion fermée avec X' intègre, T' un diviseur de P' ne contenant pas X'. Il existe alors un diagramme commutatif de la forme*

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "u''_0"] \arrow[d, "a'_0"'] & \mathbb{P}^N_{P'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^N_{\mathcal{P}'} \arrow[r, "\mathbb{P}^N_f"] \arrow[d, "q'"] & \mathbb{P}^N_{\mathcal{P}} \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, "u'_0"] & P' \arrow[r] & \mathcal{P}' \arrow[r, "f"] & \mathcal{P}, \end{tikzcd} \tag{2.1.8.1}$$

où X'' est lisse sur k, q et q' sont les projections canoniques, u''_0 est une immersion fermée, $a'^{-1}_0(T'\cap X')$ est un diviseur à croisements normaux strict de X'', a'_0 est propre, surjectif, génériquement fini et étale. Posons $T'' := q'^{-1}(T')$.

1. *(Cas avec Frobenius). Soit $\mathcal{E}' \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',T',X'/K)$. Alors $\mathcal{E}'' := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X''} \circ q'^!(\mathcal{E}') \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{P}^N_{\mathcal{P}'},T'',X''/K)$ et $\mathcal{E}'$ est un facteur direct de $q'_+(\mathcal{E}'')$.*
2. *(Cas de la compactification partielle lisse). Supposons X' lisse. Soit $\mathcal{E}' \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',T',X'/K)$. Alors $\mathcal{E}'' := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X''} \circ q'^!(\mathcal{E}') \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{P}^N_{\mathcal{P}'},T'',X''/K)$ et $\mathcal{E}'$ est un facteur direct de $q'_+(\mathcal{E}'')$.*
3. *Supposons $f_0 \circ u'_0$ propre. Soit $\mathcal{E}' \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',T',X'/K)$. Alors $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*
4. *Supposons X' lisse, $f_0 \circ u'_0$ propre et qu'il existe un diviseur T de P tel que $T' = f^{-1}(T)$. Alors, pour tout $\mathcal{E}' \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',T',X'/K)$, $f_+(\mathcal{E}') \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. De plus, pour tout $\mathcal{E}' \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',X'/K)$ (i.e. $\mathcal{E}'$ est associé à un (F-)isocristal convergent sur X'), $f_+(\mathcal{E}') \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. Grâce au théorème de désingularisation de de Jong, il existe une variété quasi-projective lisse X'', un morphisme projective génériquement fini et étale $a'_0 : X'' \to X'$ tel que $(a'_0)^{-1}(T'\cap X')$ soit un diviseur à croisements normaux strict de X''. Il existe donc une immersion de la forme $X'' \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Comme a'_0 est propre, l'immersion induite $X'' \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{X'}$ est fermée. D'où l'immersion fermée canonique : $X'' \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathcal{P}'}$, ce qui donne l'existence du diagramme commutatif 2.1.8.1 satisfaisant aux propriétés requises.

La partie 1 correspond à [Car06a, 6.3.1] (nous utilisons le théorème de pleine fidélité de Kedlaya de [Ked04] amélioré en [Ked08] qui nécessite à l'heure actuelle une structure de Frobenius). Traitons à présent le cas 2 sans structure de Frobenius. Comme X' est lisse, il existe un isocristal E' sur $X' \setminus T'$ surconvergent le long de T' et un isomorphisme $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$ (voir 1.1.18). D'après [Car05, 4], $\mathbb{D}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E'^{\vee})$ et $\mathcal{E}'' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X'' \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathcal{P}'}, T', +}(a_0'^*(E')$. Cela nous permet de reprendre la preuve de [Car06a, 6.3.1] (sans utiliser, grâce à ces deux isomorphismes, le théorème de pleine fidélité de Kedlaya). D'où 2.

Traitons à présent 3. Comme $\mathcal{E}'$ est un facteur direct de $q'_+(\mathcal{E}'')$, alors $f_+(\mathcal{E}')$ est un facteur direct de $f_+ \circ q'_+(\mathcal{E}'')$. Or, par transitivité de l'image directe $f_+ \circ q'_+(\mathcal{E}'') \xrightarrow{\sim} q_+ \circ \phi_+(\mathcal{E}'')$, avec $\phi := \mathbb{P}^N_f$.

Prouvons à présent que $\phi_+(\mathcal{E}'')$ est surholonome. Comme $f_0 \circ u'_0$ est propre, $\mathbb{P}^N_{f_0} \circ u''_0$ est alors une immersion fermée. Notons $\widetilde{\mathcal{P}} := \mathbb{P}^N_{\mathcal{P}}$. Comme la surholonomie est une notion locale, on se ramène au cas où $\widetilde{\mathcal{P}}$ est affine et où le diviseur $T'' \cap X''$ de X'' est définie par une section globale de $\widetilde{\mathcal{P}}$ dont le diviseur de $\widetilde{P}$ correspondant sera noté $\widetilde{T}$. Ainsi $T'' \cap X'' = \widetilde{T} \cap X''$. D'après 2.1.2.2, on en déduit que $\phi_+(\mathcal{E}'') \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{T}, X''/K)$. D'où sa surholonomie (voir [CT08]). Comme q est propre, q_+ préserve la surholonomie et donc $f_+ \circ q'_+(\mathcal{E}'')$ est surholonome. D'où le résultat.

On procède de même pour 4 : en posant $\widetilde{T} := q_0^{-1}(T)$, via 2.1.2.2, on vérifie $\phi_+(\mathcal{E}'') \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{T}, X''/K)$. Comme la cohérence est préservée par image directe par un morphisme propre, on obtient la première assertion. Lorsque T' est vide, la surholonomie de $\phi_+(\mathcal{E}'')$ résulte de la remarque 2.1.6. D'où le résultat.

□

2.2 Préservation de la convergence par un morphisme propre et lisse de k-variétés lisses

Proposition 2.2.1. *Soit $b_0 : Y' \to Y$ un morphisme propre et lisse de k-variétés lisses. Le foncteur $b_{0+}^{(m)}$ se factorise de la manière suivante :*

$$b_{0+}^{(m)} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y'}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y}),$$

où, par abus de notations, nous avons noté $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y})$ pour désigner la sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y})$ des complexes à cohomologie $\mathcal{O}_Y$-cohérente, de même avec des primes.

Démonstration. Comme b_0 est propre, on sait déjà que l'on obtient la factorisation $b_{0+}^{(m)} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y'}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y})$. Soit $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y'}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'})$. Il reste à établir que $b_{0+}^{(m)}(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$.

Soit $F_{Y'} : Y' \to Y'$ l'endomorphisme absolu de Frobenius. Comme $F_{Y'}$ est en particulier un morphisme fini, le théorème de descente du niveau par Frobenius (voir [Ber00, 2]) entraîne que le foncteur image inverse $F^*_{Y'}$ induit une équivalence de catégories entre $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{Y'}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m+1)}_{Y'}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'})$. Comme il en est de même sur Y et que le foncteur image directe commute à Frobenius, i.e. $F^*_Y \circ b_{0+}^{(m)} \xrightarrow{\sim} b_{0+}^{(m+1)} \circ F^*_{Y'}$, on se ramène alors à traiter le cas où $m = 0$. Comme b_0 est lisse, d'après la remarque de [Ber02, 2.4.6], $b_{0+}^{(0)}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}b_{0*}(\boldsymbol{\Omega}^{\bullet}_{Y'/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{E}')[d_{Y'/Y}]$. Comme b_0 est propre et $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{O}_{Y'}$-cohérent, d'après le théorème de Grothendieck sur la préservation de la $\mathcal{O}$-cohérence par l'image directe d'un morphisme propre, cela entraîne $b_{0+}^{(0)}(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$.

□

Proposition 2.2.2. *Soient $m_0 \geq 0$ un entier, $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $\mathcal{E}^{(m_0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. On suppose que, pour tout entier $m \geq m_0$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. Alors, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve de [Car06b, 2.2.14] à partir de « De plus, puisque $\Gamma(X, \mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ ». □

Lemme 2.2.3. *Soit $v : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}$-module cohérent sans p-torsion. Alors $v_+(\mathcal{E})$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$-module cohérent sans p-torsion.*

Démonstration. L'assertion étant locale, on se ramène au cas où $\mathfrak{U}$ est muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_n$ telles que $t_{r+1}, \ldots, t_n$ engendrent l'idéal définissant v. La préservation de la cohérence découle du fait que v est un morphisme

propre. Il reste à établir que $v_+(\mathcal{E}) = v_*(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}\leftarrow\mathfrak{Y}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}}} \mathcal{E})$ est sans p-torsion. Pour tout entier i, notons U_i et Y_i les réductions de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{Y}$ modulo π^{i+1}. Or, comme pour tout entier i le $\mathcal{D}^{(m)}_{Y_i}$-module à droite $\mathcal{D}^{(m)}_{U_i\leftarrow Y_i}$ est plat (car libre), $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}\leftarrow\mathfrak{Y}}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}}$. D'où le résultat. □

Théorème 2.2.4 (Préservation de la convergence)**.** *Soient $g : \mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, Y (resp. Y') un sous-schéma fermé lisse de U (resp. U'). On suppose que g se factorise en un morphisme $b_0 : Y' \to Y$ propre et lisse.*

Soit $\mathcal{E}'$ un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathfrak{U}', Y'/K)$ (voir 1.1.7). Alors $g_+(\mathcal{E}')$ est un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathfrak{U}, Y/K)$.

Démonstration. Le foncteur g_+ commutant à Frobenius, il suffit de vérifier la proposition sans structure de Frobenius. Or, la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}, Y/K)$ des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow\mathfrak{U},+}$ (voir 1.1.18) est stable par suite spectrale, i.e., une suite spectrale de $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}, Y/K)$ a pour aboutissement un élément de $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}, Y/K)$. Quitte à utiliser la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur g_+, on peut donc supposer que $\mathcal{E}' \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}', Y'/K)$. Or, d'après 2.1.2.2, on dispose d'une équivalence canonique entre les catégories $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathfrak{U}', Y'/K)$ et $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathfrak{U}' \times \mathfrak{U}, Y'/K)$, où Y' se plonge dans $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ via l'immersion diagonale. Quitte à remplacer $\mathfrak{U}'$ par $\mathfrak{U}' \times \mathfrak{U}$, on se ramène ainsi au cas où g lisse. Comme $\mathcal{E}'$ est à support propre sur Y et donc sur $\mathfrak{U}$, il découle de 2.1.8.4 que $g_+(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}})$ (et même $g_+(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}})$).

D'après la caractérisation de [Car05, 2.5.10] des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui sont dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow\mathfrak{U},+}$, ce qu'il reste à établir est alors local en $\mathfrak{U}$. On peut donc supposer qu'il existe un relèvement $v : \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{U}$. Notons $\mathfrak{U}'' := \mathfrak{U}' \times_{\mathfrak{U}} \mathfrak{Y}$, $v'' : \mathfrak{U}'' \hookrightarrow \mathfrak{U}'$ et $h : \mathfrak{U}'' \to \mathfrak{Y}$ les morphismes canoniques. Comme g est lisse, $\mathfrak{U}''$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse. Comme v est une immersion fermée, v'' l'est aussi. L'immersion $Y' \hookrightarrow \mathfrak{U}''$ est donc aussi fermée. Via le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.1.10), $v''^{!}(\mathcal{E}')$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U}'',\mathbb{Q}}$-module surholonome et $v''_+ v''^{!}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$. De plus, encore via la description [Car05, 2.5.10], on vérifie que $v''^{!}(\mathcal{E}')$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y'\hookrightarrow\mathfrak{U}'',+}$ On se ramène ainsi au cas où $g = h$, i.e. $\mathfrak{Y} = \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U}'$. Pour terminer la preuve, il s'agit d'établir $g_+(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$. Nous procédons pour cela de la manière suivante.

• Étape 1. Notons v'_0 l'immersion fermée canonique $Y' \hookrightarrow U'$ et soit $(\mathfrak{U}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement d'ouverts de $\mathfrak{U}'$ satisfaisant aux conditions de 1.2. Nous reprenons les notations de 1.2 (en ajoutant des primes). Comme $\mathcal{E}'$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y'\hookrightarrow\mathfrak{U}',+}$, d'après [Car05, 2.5.10], $\mathcal{E}'$ est à support dans Y' et, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{E}'_\alpha := v'^{!}_\alpha(\mathcal{E}'|\mathfrak{U}'_\alpha)$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'_\alpha,\mathbb{Q}}$-cohérent. Avec les notations de 1.1.17, il en résulte $\mathcal{L}oc(\mathcal{E}') \in \mathrm{Isoc}(Y', (\mathfrak{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. D'après le deuxième point de 1.2.9, pour tout entier m, on dispose d'une inclusion canonique $\mathrm{Isoc}(Y', (\mathfrak{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \subset \mathrm{Coh}^{(m)}(Y', (\mathfrak{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ et il existe un élément $\mathcal{F}'^{(m)} \in \mathrm{Cris}^{(m)}(Y', (\mathfrak{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/\mathcal{V})$ tel que $\mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}oc(\mathcal{E}')$ dans $\mathrm{Coh}^{(m)}(Y', (\mathfrak{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. De plus, $\mathcal{F}'^{(m)}$ peut être choisi sans p-torsion.

• Étape 2 : *Posons $\mathcal{G}'^{(m)} := \mathcal{R}ecol^{(m)}(\mathcal{F}'^{(m)})$. Alors $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

Posons $\mathcal{F}'^{(m)}_0 := \mathcal{F}'^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} k$, $\mathcal{G}'^{(m)}_0 := \mathcal{G}'^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} k$. Par 1.2.7.1, on dispose alors de l'isomorphisme $\mathcal{D}^{(m)}_{U'}$-linéaire : $\mathcal{G}'^{(m)}_0 \xrightarrow{\sim} v'^{(m)}_{0+}(\mathcal{F}'^{(m)}_0)$. Cela implique par transitivité de l'image directe : $g^{(m)}_{0+}(\mathcal{G}'^{(m)}_0) \xrightarrow{\sim} b^{(m)}_{0+}(\mathcal{F}'^{(m)}_0)$. Comme b_0 est propre lisse, d'après 2.2.1, il en résulte $g^{(m)}_{0+}(\mathcal{G}'^{(m)}_0) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_Y) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$. Or, $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} k \xrightarrow{\sim} g^{(m)}_{0+}(\mathcal{G}'^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} k)$. Comme $\mathcal{F}'^{(m)}$ est sans p-torsion, il découle de 2.2.3 que $\mathcal{G}'^{(m)}$ est sans p-torsion. On en déduit $\mathcal{G}'^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} k \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'^{(m)}_0$. D'où : $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} k \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_Y) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$. Comme de plus $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}})$, d'après la remarque de [Ber02, 3.2.2] (et de manière analogue en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{O}$), cela implique que $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$.

• Étape 3 : *Conclusion*.

a) Comme $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$ (où le dernier foncteur $g^{(m)}_+$ est le foncteur image directe en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}$-module cohérent), il découle de l'étape 2 que $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$. Comme en particulier pour tout entier m le complexe $g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$, on vérifie alors de manière analogue à [Ber02, 3.5.3] (l'hypothèse de [Ber02, 3.5.3] que le morphisme soit propre n'intervient que pour obtenir la cohérence de l'image directe, en effet il suffit d'utiliser [Ber02, 2.4.3]) pour tous entiers $m' \geq m$: $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}} g^{(m)}_+(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} g^{(m')}_+(\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}} \mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$.

De façon similaire à la preuve de [Ber02, 4.3.8], cela entraîne : $g_+(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}} \mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} g_+^{(m)}(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$.

b) Par 1.2.8.4, on obtient l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ecol^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$. D'après 1.2.8.5, pour tout entier $m' \geq m$, il en résulte $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}} \mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ecol^{(m')}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y',\mathbb{Q}}} \mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$. Or, comme $\mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \in \mathrm{Isoc}(Y', (\mathcal{Y}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$, il résulte de [Ber90, 3.1] l'isomorphisme canonique $\mathcal{F}'^{(m')}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{Y',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y',\mathbb{Q}}} \mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}$. D'où : $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}} \mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ecol^{(m')}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}'^{(m')}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'^{(m')}_{\mathbb{Q}}$. D'après a), cela implique $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} g_+^{(m)}(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}) \cap D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$.

c) De plus, on déduit de [Ber90, 3.1] l'isomorphisme $\mathcal{L}oc(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{Y',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y',\mathbb{Q}}} \mathcal{F}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}$. D'après 1.2.8.6, il en résulte l'isomorphisme $\mathcal{R}ecol \circ \mathcal{L}oc(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}} \mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}}$. Par 1.1.18, $\mathcal{R}ecol \circ \mathcal{L}oc(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$. D'après a), cela entraîne $g_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} g_+^{(m)}(\mathcal{G}'^{(m)}_{\mathbb{Q}})$.

d) Pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(g_+^{(0)}(\mathcal{G}'^{(0)}_{\mathbb{Q}}))$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. Comme l'extension $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ est plate, il découle de b) que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} (\mathcal{H}^j g_+^{(0)}(\mathcal{G}'^{(0)}_{\mathbb{Q}}))$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. De plus, comme l'extension $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ est plate, la partie c) donne $\mathcal{H}^j(g_+(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}} (\mathcal{H}^j g_+^{(0)}(\mathcal{G}'^{(0)}_{\mathbb{Q}}))$. Par 2.2.2, il en résulte que $\mathcal{H}^j(g_+(\mathcal{E}'))$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent.

□

2.3 Préservation de la surconvergence

Théorème 2.3.1. *Soit $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables (voir 1.1.5). On suppose X et X' lisses.*

1. *On dispose alors du foncteur image directe par a_0 sous la forme :*

$$a_{0+} : (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}). \tag{2.3.1.1}$$

2. *On suppose que $Y' := a_0^{-1}(Y)$ et que le morphisme induit $Y' \to Y$ soit lisse. Alors, le foncteur a_{0+} se factorise sous la forme :*

$$a_{0+} : (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}). \tag{2.3.1.2}$$

Démonstration. Comme a_0 est propre, d'après 1.1.6, il existe alors un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'_0"] \arrow[d, "a_0"'] & \mathcal{P}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \widetilde{\mathcal{P}}' \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ X \arrow[r, "u_0"] & \mathcal{P} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{P}}, \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f}$ est un morphisme propre et lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses, u_0 et u'_0 sont des immersions fermées, $\mathcal{P}$ est un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}' = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{P})$ et tels qu'il existe un diviseur $\widetilde{T}$ de $\widetilde{P}$ (resp. un diviseur $\widetilde{T}'$ de $\widetilde{P}'$) vérifiant $Y = X \setminus \widetilde{T}$ (resp. $Y' = X' \setminus \widetilde{T}'$) et $\widetilde{T}' \supset \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$. Notons $T := P \cap \widetilde{T}$, $T' := P' \cap \widetilde{T}'$. Dans ce cas, la catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$ est canoniquement isomorphe à $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}', T', X/K)$ (voir 2.1.5). Soit $\mathcal{E}' \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}', T', X/K)$.

Comme f est propre, $f_+(\mathcal{E}')$ est surholonome. D'où $f_+(\mathcal{E}') \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K) \cong (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$. On définit alors le foncteur a_0 en posant $a_{0+}(\mathcal{E}') := f_+(\mathcal{E}')$. Il découle des équivalences de catégories de 2.1.2 que a_{0+} ne dépend pas (à isomorphisme canonique près) du choix du prolongement f de a_0.

Traitons à présent 2. Comme $Y' := a_0^{-1}(Y)$, par 1.1.6 on peut supposer $\widetilde{T}' = f^{-1}(\widetilde{T})$. Notons $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$ et $\mathfrak{U}' := \mathcal{P}' \setminus T'$. Le morphisme induit $g : \mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ est un prolongement du morphisme propre et lisse $Y' \to Y$ via les immersions fermées $Y \hookrightarrow \mathfrak{U}$, $Y' \hookrightarrow \mathfrak{U}'$. Les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}'|\mathfrak{U}'$ proviennent alors de $(F\text{-})$isocristaux

convergents sur Y'. Grâce à 2.2.4 et comme $f_+(\mathcal{E}')|\mathfrak{U} \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}'|\mathfrak{U}')$, il en résulte que les espaces de cohomologie de $f_+(\mathcal{E}')|\mathfrak{U}$ proviennent de $(F\text{-})$isocristaux convergents sur Y. D'après [Car06b, 2.2.12], cela implique que les espaces de cohomologie de $f_+(\mathcal{E}')$ proviennent de $(F\text{-})$isocristaux sur Y surconvergents le long de $X \setminus Y$. □

Remarques 2.3.2. La démonstration de 2.3.1 a été facilitée par le fait que le morphisme a_0 se prolonge en un morphisme propre (et lisse) de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Nous donnons une généralisation de 2.3.1 via le théorème 2.3.3 ci-dessous (i.e., on allège l'hypothèse de propreté du morphisme de V-schémas formels lisses). L'hypothèse que le morphisme f soit propre est évitée dans 2.3.3 grâce au lemme technique 2.1.8.

Théorème 2.3.3. *Considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u_0'} & \mathcal{P}' \\ {\scriptstyle a_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{u_0} & \mathcal{P}, \end{array} \tag{2.3.3.1}$$

où f est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, a_0 est un morphisme propre de k-variétés lisses, u_0 et u_0' sont des immersions fermées. Soient T un diviseur de P, T' un diviseur de P' tels que $Y' = a_0^{-1}(Y)$ où $Y := X \setminus T$ et $Y' := X' \setminus T'$.

Soit $\mathcal{E}'$ un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Alors $f_+(\mathcal{E}')$ est un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}, T, X/K)$.

Démonstration. Quitte à utiliser la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur f_+, on peut supposer que $\mathcal{E}' \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$. Posons $\mathcal{P}'' := \mathcal{P}' \times \mathcal{P}$, $q : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}$ et $q' : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}'$ les projections canoniques, $T'' := q^{-1}(T)$. Comme $Y' = X' \setminus T''$, il résulte de 2.1.2.2, $\mathcal{E}'' := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X'} \circ q'^{!}(\mathcal{E}') \in (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}'', T'', X'/K)$. Comme $q_+(\mathcal{E}'') \xrightarrow{\sim} f_+ \circ q'_+(\mathcal{E}'') \xrightarrow{\sim} f_+(\mathcal{E}')$ (le dernier isomorphisme résulte de 2.1.2.2), on se ramène ainsi au cas où $T' = f^{-1}(T)$. Grâce à 2.1.8.4, comme $u_0 \circ a_0$ est propre, $f_+(\mathcal{E}') \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. On conclut alors de manière analogue à la fin de la preuve de 2.3.1.2 en utilisant 2.2.4 et [Car06b, 2.2.12]. □

3 Préservation de la surconvergence partielle avec structure de Frobenius

3.1 Complément sur la stabilité de la surholonomie avec structure de Frobenius

Le lemme qui suit est une extension de [Car07, 3.1.1] (on ne suppose plus que le $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ est propre).

Lemme 3.1.1. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé de P, $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, X/K)$. Il existe alors un diviseur T de P tel que $X \setminus T$ soit affine lisse et dense dans X et tel que, pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T)) \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$.*

Démonstration. L'assertion étant locale en $\mathcal{P}$, on peut supposer P affine et intègre. Le F-complexe $\mathcal{E}$ est en particulier surcohérent. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est donc un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surcohérent (voir [Car04, 3.1.1]). D'après [Car08, 2.2], il existe un ouvert $\mathfrak{U}_j$ de $\mathcal{P}$ tel que $X \cap U_j$ soit lisse et dense dans X et tel que $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})|\mathfrak{U}_j$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X \cap U_j \hookrightarrow \mathfrak{U}_j,+}$. En posant $\mathfrak{U} := \cap_j \mathfrak{U}_j$, on en déduit que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X\cap U \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$, avec $X \cap U$ lisse et dense dans X. En choisissant un élément de l'idéal définissant $P \setminus U \hookrightarrow P$ qui n'appartienne pas à l'idéal définissant $X \hookrightarrow P$, on définit un diviseur T de P tel que $\mathcal{P} \setminus T \subset \mathfrak{U}$ et $T \cap X$ soit un diviseur de X. Notons alors $\mathfrak{U}$ pour $\mathcal{P} \setminus T$. Ainsi, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))$ est surcohérent et $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))|\mathfrak{U}$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X\cap U \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$. Par définition de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (voir 1.1.7), il reste à établir la surcohérence $\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T)))$ de la manière suivante.

a) Pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T)))) = 0$. En effet, comme $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))))$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, d'après [Ber96, 4.3.12], il suffit de vérifier $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))))|\mathfrak{U} = 0$. Or, $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T))))|\mathfrak{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^l(\mathbb{D}(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}|\mathfrak{U})))$. Comme $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X\cap U \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$, d'après [Car08, 7.3], $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ est surholonome et donc holonome (d'après [Car08, 2.5]). D'après le critère de Virrion concernant l'holonomie (voir [Vir00]), pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}|\mathfrak{U}))) = 0$. On a ainsi établi, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}({}^{\dagger}T)))) = 0$.

b) Via la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $\mathbb{D}_T$ appliquée au complexe $\mathcal{E}(^\dagger T)$, on déduit alors de a), $\mathcal{H}^j(\mathbb{D}_T(\mathcal{E}(^\dagger T))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}(^\dagger T)))$. Or, $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}(^\dagger T))$ est un complexe surholonome et particulier surcohérent. Il en résulte que, pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(\mathbb{D}_T(\mathcal{E}(^\dagger T)))$ est surcohérent. Il en est alors de même de $\mathbb{D}_T(\mathcal{H}^j(\mathcal{E}(^\dagger T)))$.

□

Proposition 3.1.2. *Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse.*

1. *Soit $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Si pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surholonome alors $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*
2. *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Le complexe $\mathcal{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ si et seulement si, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surholonome.*

Démonstration. La première assertion résulte de la définition de la surholonomie (et de la stabilité de la cohérence par suite spectrale). Cette implication avec structure de Frobenius reste valable. Réciproquement, soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Prouvons alors que ses espaces de cohomologie sont surholonomes. On procède par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{E}$ que l'on désigne par X. D'après 3.1.1, il existe un diviseur T de P tel que les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}(^\dagger T)$ appartiennent à $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$, avec $X \setminus T$ lisse et dense dans X. Grâce à [CT08], il en résulte que les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}(^\dagger T)$ sont surholonomes. Par 1, cela implique que $\mathcal{E}(^\dagger T)$ est surholonome. Or, par hypothèse de récurrence, il en est de même des espaces de cohomologie $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E})$. En utilisant le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ relativement à T, on en déduit le résultat. □

Théorème 3.1.3. *Soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$ à support propre sur P. Alors $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. Comme il s'agit de reprendre essentiellement la preuve de [Car08, 8.8], nous omettons les vérifications déjà obtenues. Soit X' le support de $\mathcal{E}'$. Il s'agit de procéder par récurrence sur $\dim X'$. Lorsque $\dim X' = 0$, cela résulte du théorème de Berthelot-Kashiwara de 1.1.10 (utilisé pour l'immersion fermée $X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ qui se relève). En utilisant des triangles distingués de Mayer-Vietoris, on se ramène au cas où X' est intègre (de manière identique à l'étape 3 de la preuve de [Car08, 8.8]). De plus, par 3.1.2, quitte à utiliser la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur f_+, on peut supposer que $\mathcal{E}'$ est un module. D'après 3.1.1, il existe alors un diviseur T' de P' tel que $Y' := X' \setminus T'$ soit affine lisse et dense dans X' et $\mathcal{E}'(^\dagger T') \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y',X'/K)$. D'après 2.1.8.3, il en résulte alors que $f_+(\mathcal{E}'(^\dagger T'))$ est surholonome. Or, par hypothèse de récurrence, $f_+(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}(\mathcal{E}'))$ est surholonome. On conclut alors en appliquant f_+ au triangle de localisation en T' de $\mathcal{E}'$.

□

Remarques 3.1.4. Nous avions dans la preuve de [Car08, 8.8] (que l'on a reprise pour 3.1.3) d'abord traité le cas où le support est lisse. Par contre dans la preuve de 3.1.3, nous avons éviter de traité ce cas. Cela a été possible car ce cas où le support est lisse n'a été utilisé (dans la preuve de [Car08, 8.8]) que dans deux cas : lorsque $\dim X' = 0$ ou lorsque $\mathcal{E}'(^\dagger T')$ est associé à un F-isocristal surconvergent sur $X' \setminus T'$. De plus, on remarquera que 2.1.8 utilise implicitement une partie de la preuve de [Car08, 8.8].

On obtient grâce à 3.1.3 une légère amélioration de [Car08, 8.8] :

Corollaire 3.1.5. *Soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses. Considérons les deux conjectures suivantes de Berthelot (voir [Ber02, 5.3.6]) :*

A) Si $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$ est à support propre sur $\mathcal{P}$, alors $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.

B) Si $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$, alors $f^!(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$.

La conjecture B) implique alors la conjecture A).

Démonstration. D'après [Ber02, 8.3], la conjecture B) implique que les notions d'holonomie et de surholonomie (avec structure de Frobenius) coïncident. Il suffit alors d'appliquer 3.1.3. □

3.2 Cas des F-isocristaux partiellement surcohérents sur les k-variétés lisses avec une compactification partielle quelconque

Lemme 3.2.1. *Soit $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, X un sous-schéma fermé de P' tel que le morphisme induit $X \to P$ soit une immersion fermée, Y un ouvert de X, T un diviseur de P (resp. T' un diviseur de P') tels que $Y = X \setminus T$ (resp. $Y = X \setminus T'$). On suppose Y lisse.*

1. *Soient alors $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K))$. Pour tout entier $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, les égalités suivantes sont alors vérifiées :*

$$\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})) = 0, \qquad \mathcal{H}^j(f_+(\mathcal{E}')) = 0.$$

2. *Les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ et $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Notons $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$ et $\mathfrak{U}' := \mathcal{P}' \setminus T'$.

• Vérifions d'abord le lemme lorsque f est l'identité. D'après [CT08], $\mathcal{E}$ est surholonome et donc $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-surcohérent. Par [Car04, 3.2.4] (voir aussi la remarque [Car04, 3.2.2.1]), cela implique que le morphisme canonique $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(^\dagger T')$ est un isomorphisme. Ainsi, $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T')_{\mathbb{Q}}$-surcohérent. Comme le foncteur dual commute aux extensions, $\mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (^\dagger T')(\mathbb{D}(\mathcal{E}))$. Comme $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-surcohérent, il en résulte que $\mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T')_{\mathbb{Q}}$-surcohérent. Or, $\mathcal{E}|\mathfrak{U}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}', T \cap U', Y/K)$. Comme $(T \cap U') \cap Y = \emptyset$, il résulte de 2.1.1 que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}', Y/K)$. Nous avons donc vérifié que $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$, i.e., l'inclusion $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \subset F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$. Par symétrie, on obtient l'inclusion inverse.

• Traitons à présent le cas général. Quitte à introduire $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}$, on se ramène au cas où le morphisme f est lisse. Dans ce cas, $f^{-1}(T)$ est un diviseur de P' tel que $X \setminus f^{-1}(T) = Y$. D'après le cas où f est l'identité, on se ramène à supposer $T' = f^{-1}(T)$.

• Vérifions d'abord l'assertion 1. Comme $\mathcal{E}'$ est surholonome (d'après [CT08]) il résulte de 3.1.3 que $f_+(\mathcal{E}')$ est surholonome. Comme $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} (^\dagger T')(\mathcal{E}')$ et par commutation de l'image directe au foncteur cohomologique local (voir [Car04, 2.2.18]), on obtient $f_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (^\dagger T) \circ f_+(\mathcal{E}')$. En particulier, le complexe $f_+(\mathcal{E}')$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. Par [Ber96, 4.3.12], pour vérifier que, pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}^j(f_+(\mathcal{E}')) = 0$, il suffit de l'établir en dehors de T, ce qui amène au cas lisse déjà traité (voir 2.1.2.1). De même, comme le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})$ préserve la surholonomie et commute aux foncteurs cohomologiques locaux, avec [Ber96, 4.3.12] qui nous ramène au cas lisse, on vérifie que pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})) = 0$.

• Établissons à présent 2. Nous avons déjà vérifié que $f_+(\mathcal{E}')$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans X, surholonome en tant que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module. Pour prouver que $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, il suffit alors d'établir que $f_+(\mathcal{E}')|\mathfrak{U}$ provient d'un F-isocristal surconvergent sur Y. Cela est bien le cas d'après le cas lisse (voir 2.1.2.2). De même, on vérifie que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X/K)$.

Or, d'après [Car06a, 6.5.2], le théorème de pleine fidélité de Kedlaya se traduit la façon suivante : les foncteurs restrictions $|\mathfrak{U} : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}, Y/K)$ et $|\mathfrak{U} : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}, Y/K)$ sont pleinement fidèles. On en déduit, à partir du cas lisse (voir 2.1.2.2), les isomorphismes : $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ et $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. D'où le résultat. □

Définition 3.2.2. Soient X une k-variété et Y un ouvert lisse de X tels que (Y, X) soit d-plongeable (1.1.5).

Choisissons $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P tels qu'il existe une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus T$. Il résulte de 3.2.1 (de manière analogue au cas où X est lisse sans structure de Frobenius de 2.1.4) que la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ ne dépend ni du choix de l'immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et ni de celui du diviseur T tel que $Y = X \setminus T$ (mais seulement du couple (Y, X)). On la notera donc sans ambiguïté $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$. Ses objets sont les « F-isocristaux surcohérents sur (Y, X) ».

Par contre l'analogue de 2.1.4.1 est conjecturé ci-dessous.

Conjecture 3.2.3. Soient X une k-variété, Y un ouvert lisse de X tels que (Y, X) soit d-plongeable (1.1.5). On dispose d'une équivalence canonique de catégories :

$$(F\text{-})\mathrm{Isoc}^\dagger(Y, X/K) \cong (F\text{-})\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K). \tag{3.2.3.1}$$

Remarques 3.2.4. D'après [Car07, 2.3.1], la conjecture 3.2.3 a été démontrée lorsque X est propre et avec structure de Frobenius.

Théorème 3.2.5 (Dévissage des F-complexes surholonomes en F-isocristaux partiellement surcohérents)**.** *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, T un diviseur de P, Y un sous-schéma fermé de $P\setminus T$, $\mathcal{E}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,\overline{Y}/K)$ (voir les notations 1.1.8), où $\overline{Y}$ l'adhérence schématique de Y dans P.*

Il existe alors des diviseurs $T_1,\dots,T_r$ contenant T avec $T_r=T$ tels que, en notant $T_0:=\overline{Y}$, pour $i=0,\dots,r-1$, le schéma $Y_i:=T_0\cap\cdots\cap T_i\setminus T_{i+1}$ soit lisse et, pour tout entier j,

$$\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T_0\cap\cdots\cap T_i}({}^\dagger T_{i+1})(\mathcal{E}))\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T_{i+1},T_0\cap\cdots\cap T_i/K)=F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_i,\overline{Y}_i/K)$$

où $\overline{Y}_i$ est l'adhérence schématique de Y_i dans P.

Démonstration. En procédant par récurrence sur la dimension de Y, cela résulte de 3.1.1. □

Lemme 3.2.6. *Soient $f:\mathcal{P}'\to\mathcal{P}$ un morphisme lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, X un sous-schéma fermé de P' tel que le morphisme induit $X\to P$ soit une immersion fermée, Y un ouvert de X, T un diviseur de P (resp. T' un diviseur de P') tels que $Y=X\setminus T$ (resp. $Y=X\setminus T'$).*

1. *Soient $\mathcal{E}\in F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$, $\mathcal{E}'\in F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}',T',X/K)$. Pour tout entier $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, les égalités suivantes sont alors vérifiées :*
$$\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E}))=0,\qquad\qquad \mathcal{H}^j(f_+(\mathcal{E}'))=0.$$
2. *Si f est en plus propre ou si f est une immersion ouverte alors les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}',T',X/K)$ (resp. entre les catégories $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',T',X/K)$).*
3. *On suppose Y lisse. Si f est en plus propre ou si f est une immersion ouverte alors les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ induisent des équivalences quasi-inverses $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',T',X/K)$.*

Démonstration. I) Comme $f^{-1}(T)$ est un diviseur de P' tel que $Y=X\setminus f^{-1}(T)$, on déduit de [Car08, 4.6] les égalités $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}',T',X/K)=F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',f^{-1}(T),X/K)$ et $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}',T',X/K)=F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',f^{-1}(T),X/K)$. Avec 3.2.1, on en déduit alors que $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',T',X/K)=F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',f^{-1}(T),X/K)$. On se ramène ainsi à supposer $T'=f^{-1}(T)$.

II) De manière analogue à la preuve de [Car04, 3.2.6], on vérifie alors 1 à partir de 3.2.1.1. Cela entraîne les factorisations des foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ et f_+ entre les catégories $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $F\text{-}\mathrm{Surhol}(\mathcal{P}',T',X/K)$. Pour vérifier 2, il suffit alors de traiter le cas respectif.

III) Prouvons à présent le cas respectif de 2 (resp. 3 en supposant Y lisse) : soient $\mathcal{E}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ (resp. $\mathcal{E}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$) et $\mathcal{E}'\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',T',X/K)$ (resp. $\mathcal{E}'\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',T',X/K)$). Notons $\mathfrak{U}:=\mathcal{P}\setminus T$, $\mathfrak{U}':=\mathcal{P}'\setminus T'$.

III.A) Par stabilité de la surholonomie (voir 3.1.3 pour l'image directe et [Car08] pour les autres foncteurs), on obtient les factorisations $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!:F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)\to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',T',X/K)$ et $f_+:F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}',T',X/K)\to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$.

On dispose de l'inclusion $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)\subset F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ et de même avec des primes. De plus, on remarque qu'un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$, surholonome en tant que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module et tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U},Y/K)$ est un élément de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ (et de même avec des primes). Avec ces remarques, pour constater que l'on bénéficie des factorisations $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!:F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)\to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',T',X/K)$ et $f_+:F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P}',T',X/K)\to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$, il suffit de le vérifier en dehors des diviseurs, ce qui découle du cas déjà traité de 2.1.2.4 (où la compactification partielle est lisse).

III.B) Il reste encore à vérifier que ces foncteurs sont quasi-inverses. Traitons d'abord le cas où f est propre et lisse. Le cas non respectif résulte alors de [Car08, 4.16]. Traitons maintenant le cas respectif. Il résulte des factorisations précédentes de f_+ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!$ que l'on a $f_+(\mathcal{E}')\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}})$. Comme f est propre, on dispose alors par adjonction des morphismes canoniques $f_+\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X f^!\circ f_+(\mathcal{E}')$. D'après [Ber96, 4.3.12], pour vérifier que ces morphismes sont des isomorphismes, il suffit de l'établir respectivement

en dehors des diviseurs T et T', ce qui nous ramène au cas de la compactification partielle lisse qui a été traité en 2.1.2.4.

Supposons à présent que f soit une immersion ouverte. Via 1 et grâce à 3.1.2.2, on obtient alors les isomorphismes canoniques $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X} \circ f^{!}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^{*}(\mathcal{E})$ et $f_{*}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f_{+}(\mathcal{E}')$. On dispose de plus des morphismes d'adjonction : $\mathcal{E} \to f_{*}f^{*}(\mathcal{E})$ et $f^{*}f_{*}(\mathcal{E}') \to (\mathcal{E}')$, dont le dernier est toujours un isomorphisme. Pour le cas respectif, il résulte de [Ber96, 4.3.12] que ces morphismes sont des isomorphismes (car ils le sont en dehors des diviseurs d'après 2.1.2.4). Traitons alors le cas non respectif. Cela résulte alors de 3.2.5. En effet, soient $T_1, \ldots, T_r$ des diviseurs de P induisant le dévissage de 3.2.5. Or, d'après le cas respectif, le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_0\cap\cdots\cap T_i}({}^{\dagger}T_{i+1})(\mathcal{E})) \to f_{*}f^{*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_0\cap\cdots\cap T_i}({}^{\dagger}T_{i+1})(\mathcal{E})))$ est un isomorphisme. Il en résulte par dévissage que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to f_{*}f^{*}(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. D'où le résultat.

□

Notations 3.2.7. Soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y,X) soit proprement d-plongeable (1.1.5).

Choisissons $\widetilde{\mathcal{P}}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\widetilde{T}$ un diviseur de $\widetilde{P}$ tels qu'il existe une immersion $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ induisant l'égalité $Y = X \setminus \widetilde{T}$. Soit $\mathcal{P}$ un ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$ contenant X tel que l'immersion $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ canoniquement induite soit fermée. On note alors $T := P \cap \widetilde{T}$ le diviseur de P induit.

- La catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, des choix effectués (mais seulement de (Y,X)). On notera alors sans ambiguïté cette catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ dont les objets sont appelés les « F-complexes surholonomes de $\mathcal{D}_{(Y,X)/K}$-modules arithmétiques » ou « les F-complexes surholonomes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $(Y,X)/K$ ».
  De même, la catégorie F-Surhol$(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend canoniquement que de (Y,X), sera notée F-Surhol$(Y,X/K)$ et ses éléments sont appelés les « $F\text{-}\mathcal{D}_{(Y,X)/K}$-modules arithmétiques surholonomes » ou « les F-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes sur $(Y,X)/K$ ».
  En effet, il s'agit alors de reprendre les arguments de 2.1.5 en remplaçant la référence 2.1.2.4 par 3.2.6.
- Lorsque Y est lisse, la catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend de même canoniquement que de (Y,X) et sera notée $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$. Lorsque $Y = X$, on notera $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{cv}}(\mathcal{D}_{Y/K})$ au lieu de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$. On remarque, grâce à [CT08], que l'on dispose d'un foncteur pleinement fidèle canonique $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}) \subset F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$.

Notations 3.2.8. On reprend les notations de 3.2.7 et on pose $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$. Le foncteur restriction $|\mathfrak{U} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathfrak{U},Y/K)$ ne dépend canoniquement pas du choix de l'immersion $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ et du diviseur $\widetilde{T}$ tels que $Y = X \setminus \widetilde{T}$. On le note alors $|Y : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$.

De même, lorsque Y est lisse, le foncteur restriction $|\mathfrak{U}$ induit le foncteur canonique $|Y : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$.

Remarques 3.2.9. On reprend les notations de 3.2.8.

- Le foncteur pleinement fidèle F-Surhol$(\mathcal{P},T,X/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P},T,X/K)$ ne dépend pas du choix de l'immersion $X \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ et du diviseur $\widetilde{T}$ tels que $Y = X \setminus \widetilde{T}$. On dispose ainsi du foncteur canonique pleinement fidèle F-Surhol$(Y,X/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$.
- Supposons Y est lisse. Un module $\mathcal{E}$ de F-Surhol$(\mathcal{P},T,X/K)$ appartient à $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ si et seulement si $\mathcal{E}|\mathfrak{U} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U},Y/K)$. On en déduit qu'un F-complexe $\mathcal{E}$ de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ si et seulement si $\mathcal{E}|Y$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$.

3.2.10. Soit $a_0 : (Y',X') \to (Y,X)$ un morphisme de couples de k-variétés proprement d-plongeables (voir 1.1.5). On dispose alors du foncteur image inverse extraordinaire par a_0 :

$$a_0^{!} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}).$$

Lorsque que a_0 est un morphisme propre (voir la définition 1.1.6), on dispose du foncteur image directe par a_0 :

$$a_{0+} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}).$$

Construction. D'après 1.1.6, on dispose alors d'un diagramme de la forme 1.1.6.1 satisfaisant aux conditions requises de 1.1.6 et dont on reprendra les notations.

– Pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$, le foncteur $a_0^!$ est alors défini en posant : $a_0^!(\mathcal{E}) := ({}^\dagger T') \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X \circ f^!(\mathcal{E})$.
– Lorsque a_0 est propre, pour tout $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}', T', X/K)$, le foncteur a_{0+} est alors défini en posant : $a_{0+}(\mathcal{E}') := f_+(\mathcal{E}')$. On vérifie que le complexe $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ grâce à 3.1.3.
– Par transitivité des foncteurs images directes et images inverses extraordinaires, via les équivalences canoniques de catégories définissant l'indépendance de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ (qui font intervenir ces foncteurs), on vérifie que la définition des foncteurs $a_0^!$ et a_{0+} ne dépend pas du choix du diagramme de la forme 1.1.6.1.

□

Lemme 3.2.11. *Soient $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables tel que $Y' = a_0^{-1}(Y)$, $b_0 : (Y', Y') \to (Y, Y)$ le morphisme induit par a_0. Pour tout $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$, on dispose de l'isomorphisme canonique*

$$a_{0+}(\mathcal{E}')|Y \xrightarrow{\sim} b_{0+}(\mathcal{E}'|Y').$$

Démonstration. D'après 1.1.6, on dispose alors d'un diagramme de la forme 1.1.6.1 satisfaisant aux conditions requises de 1.1.6 et dont on reprendra les notations. Comme $Y' = a_0^{-1}(Y)$, on peut en outre supposer que $\widetilde{T}' = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{T})$. D'où le résultat par définition des foncteurs restriction et image directe. □

Rappelons que d'après [Car07], on dispose de l'équivalence de catégories : $\mathrm{sp}_{Y+} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$. Le théorème 3.2.12 ci-dessous est donc une version formelle de la conjecture de Berthelot (dans le cas absolu).

Théorème 3.2.12. *Soit $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables (voir 1.1.5). On suppose Y est lisse, $Y' = a_0^{-1}(Y)$ et le morphisme induit $Y' \to Y$ lisse.*

Le foncteur image directe par a_0 induit alors la factorisation :

$$a_{0+} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}). \tag{3.2.12.1}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$. D'après le deuxième point de la remarque 3.2.9, il suffit de vérifier que $a_{0+}(\mathcal{E}')|Y \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$. Or, d'après 3.2.11 et avec ses notations, $a_{0+}(\mathcal{E}')|Y \xrightarrow{\sim} b_{0+}(\mathcal{E}'|Y')$. Comme $\mathcal{E}'|Y' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',Y')/K})$, comme b_0 satisfait aux conditions de 2.3.1 (i.e. les compactifications partielles sont lisses), on obtient $b_{0+}(\mathcal{E}'|Y') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,Y)/K})$. □

3.3 Cas des F-isocristaux partiellement surcohérents sur les k-variétés quelconques

Définition 3.3.1. Soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit proprement d-plongeable (1.1.5).
– On désigne par $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-Surhol}(Y, X/K)$ (voir 3.2.7) des objets $\mathcal{E}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout morphisme $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ de couples de k-variétés proprement d-plongeables (voir 1.1.6) tel que Y' soit lisse, on a alors $a_0^!(\mathcal{E})[-d_{Y'/Y}] \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', X'/K)$, où (via l'inclusion canonique du premier point de 3.2.9) le foncteur $a_0^!$ est défini en 3.2.10 et la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', X'/K)$ a été définie dans 3.2.7.
  Les objets de $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$ sont par définition les « F-isocristaux surcohérents sur (Y, X) ». On remarquera que la définition est compatible avec celle donnée lorsque Y est une k-variété lisse dans 3.2.7.
– De manière analogue à 3.2.7, on désigne par $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$ des objets $\mathcal{E}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout morphisme $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ de couples de k-variétés proprement d-plongeables tel que Y' soit lisse, on a alors $a_0^!(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$, où la catégorie $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$ est celle définie en 3.2.7

Théorème 3.3.2. *Soient $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables et $q_0 : (\widetilde{Y}, \widetilde{X}) \to (Y, X)$ un morphisme de couples de k-variétés proprement d-plongeables. Soient $\widetilde{Y}' := \widetilde{Y} \times_Y Y'$, $\widetilde{X}' := \widetilde{X} \times_X X'$, $q_0' : (\widetilde{Y}', \widetilde{X}') \to (Y', X')$ et $\widetilde{a}_0 : (\widetilde{Y}', \widetilde{X}') \to (Y, X)$ les morphismes de couples de k-variétés proprement d-plongeables induits. On dispose alors de l'isomorphisme de changement de base fonctoriel en $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$:*

$$q_0^! \circ a_{0+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \widetilde{a}_{0+} \circ q_0'^!(\mathcal{E}').$$

Démonstration. Soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un prolongement de a_0, T un diviseur de P, T' un diviseur de P' tels que $T' \supset f^{-1}(T)$ s'inscrivant dans un diagramme de la forme 1.1.6.1 ce qui permet de calculer le foncteur a_{0+}. De même, soient $g : \widetilde{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$ un prolongement de q_0, $\widetilde{T}$ un diviseur de $\widetilde{P}$ tel que $\widetilde{T} \supset g^{-1}(T)$ permettant de calculer $q_0^!$. On note alors $\widetilde{\mathcal{P}}' := \widetilde{\mathcal{P}} \times_{\mathcal{P}} \mathcal{P}'$ et $\widetilde{g} : \widetilde{\mathcal{P}}' \to \mathcal{P}'$, $f' : \widetilde{\mathcal{P}}' \to \widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{T}' := (f')^{-1}(\widetilde{T}) \cup \widetilde{g}^{-1}(T')$. On remarque alors que $\widetilde{Y}' = \widetilde{X}' \setminus \widetilde{T}'$. Ainsi par construction $q_0'^!(\mathcal{E}') = \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{X}'} \circ ({}^\dagger \widetilde{T}') \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}')$ et

$$\widetilde{a}_{0+} \circ q_0'^!(\mathcal{E}') = f'_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{X}'} \circ ({}^\dagger \widetilde{T}') \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}').$$

D'un autre côté, on vérifie par définition :

$$q_0^! \circ a_{0+}(\mathcal{E}') = \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{X}} \circ ({}^\dagger \widetilde{T}) \circ g^! \circ f_+(\mathcal{E}').$$

D'après [Car04, 3.1.8], $g^! \circ f_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f'_+ \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}')$. D'où : $q_0^! \circ a_{0+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{X}} \circ ({}^\dagger \widetilde{T}) \circ f'_+ \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}')$. Par commutation des foncteurs locaux à support strict et des foncteurs de localisation aux foncteurs images directes (voir [Car04, 2.2.18]), il en résulte :

$$q_0^! \circ a_{0+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f'_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{(f')^{-1}(\widetilde{X})} \circ ({}^\dagger (f')^{-1}(\widetilde{T})) \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}').$$

Or, $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'} \circ ({}^\dagger T')(\mathcal{E}')$. Par commutation des foncteurs locaux à support strict et des foncteurs de localisation aux foncteurs images inverses extraordinaires (voir [Car04, 2.2.18]), cela entraîne : $\widetilde{g}^!(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{g}^{-1}(X')} \circ ({}^\dagger \widetilde{g}^{-1}(T')) \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}')$. D'où :

$$\begin{aligned} q_0^! \circ a_{0+}(\mathcal{E}') &\xrightarrow{\sim} f'_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{(f')^{-1}(\widetilde{X})} \circ ({}^\dagger (f')^{-1}(\widetilde{T})) \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{g}^{-1}(X')} \circ ({}^\dagger \widetilde{g}^{-1}(T')) \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}') \\ &\xrightarrow{\sim} f'_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\widetilde{X}'} \circ ({}^\dagger \widetilde{T}') \circ \widetilde{g}^!(\mathcal{E}') = \widetilde{a}_{0+} \circ q_0'^!, \end{aligned}$$

le deuxième isomorphisme découlant de $\widetilde{g}^{-1}(T') \cap \widetilde{g}^{-1}(X') = \widetilde{X}'$. □

Théorème 3.3.3. *Soit $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables tel que $a_0^{-1}(Y) = Y'$ et tel que le morphisme induit $Y' \to Y$ soit propre et lisse. Alors, le foncteur image directe par a_0 se factorise sous la forme :*

$$a_{0+} : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K}) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}). \qquad (3.3.3.1)$$

Démonstration. Par définition de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$, on se ramène via le théorème de changement de base de 3.3.2 au cas où Y est lisse. Enfin, par 3.2.12, ce cas a déjà été traité. □

Théorème 3.3.4 (Surconvergence générique de la surholonomie)**.** *Soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit proprement d-plongeable (1.1.5). Pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K})$, il existe un ouvert dense $\widetilde{Y}$ de Y tel que*

$$\mathcal{E}|\widetilde{Y} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(\widetilde{Y},X)/K}).$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt de 3.1.1. □

On déduit aussitôt de 3.3.4 le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.5. *Soit $a_0 : (Y', X') \to (Y, X)$ un morphisme propre de couples de k-variétés proprement d-plongeables. Pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y',X')/K})$, il existe un ouvert dense $\widetilde{Y}$ de Y tel que*

$$a_{0+}(\mathcal{E})|\widetilde{Y} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcv}}(\mathcal{D}_{(Y,X)/K}).$$

Références

[Ber86] P. BERTHELOT – « Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1986), no. 23, p. 3, 7–32, Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). 1

[Ber90] — , « Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules », p-adic analysis (Trento, 1989), Springer, Berlin, 1990, p. 80–124. 10, 11, 18

[Ber96] — , « -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272. 5, 10, 11, 19, 21, 22, 23

[Ber00] — , « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2000), no. 81, p. vi+136. 3, 16

[Ber02] — , « Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. 10, 16, 17, 18, 20

[Car04] D. CARO – « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996. 3, 11, 19, 21, 22, 25

[Car05] — , « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. Cas lisse », *ArXiv Mathematics e-prints* (2005). 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17

[Car06a] — , « Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents », *Invent. Math.* **166** (2006), no. 2, p. 397–456. 2, 5, 6, 8, 16, 21

[Car06b] — , « Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compositio Mathematica* **142** (2006), no. 01, p. 169–206. 11, 13, 16, 19

[Car07] — , « Overconvergent F-isocrystals and differential overcoherence », *Invent. Math.* **170** (2007), no. 3, p. 507–539. 2, 6, 19, 22, 24

[Car08] — , « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes. », *À paraître aux Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2008). 3, 5, 6, 7, 11, 15, 19, 20, 22

[CT08] D. CARO et N. TSUZUKI – « Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties », *ArXiv Mathematics e-prints* (2008). 5, 6, 15, 16, 20, 21, 23

[Elk73] R. ELKIK – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603 (1974). 7

[ÉLS97] J.-Y. ÉTESSE et B. LE STUM – « Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. II. Zéros et pôles unités », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 1, p. 1–31. 10

[Ete08] J.-Y. ETESSE – « Images directes et fonctions l en cohomologie rigide », 2008, http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :0803.1580. 2

[Keda] K. S. KEDLAYA – « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, III : Local semistable reduction at monomial valuations », http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :math/0609645. 6

[Kedb] — , « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, IV : Local semistable reduction at nonmonomial valuations », http ://aps.arxiv.org/format/0712.3400. 6

[Ked04] — , « Full faithfulness for overconvergent F-isocrystals », Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 819–835. 16

[Ked07] — , « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. I. Unipotence and logarithmic extensions », *Compos. Math.* **143** (2007), no. 5, p. 1164–1212. 6

[Ked08] — , « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. II. A valuation-theoretic approach », *Compos. Math.* **144** (2008), no. 3, p. 657–672. 6, 16

[Ogu90] A. OGUS – « The convergent topos in characteristic p », The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 133–162. 11

[Shi07a] A. SHIHO – « Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology i », 2007, http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :0707.1742. 2

[Shi07b] — , « Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology ii », 2007, http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :0707.1743. 2

[Tsu02] N. TSUZUKI – « Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals », *Duke Math. J.* **111** (2002), no. 3, p. 385–418. 6

[Tsu03] — , « On base change theorem and coherence in rigid cohomology », *Doc. Math.* (2003), no. Extra Vol., p. 891–918 (electronic), Kazuya Kato's fiftieth birthday. 1, 2

[Vir00] A. VIRRION – « Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 1–68. 5, 19

Daniel Caro
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen Campus 2
14032 Caen Cedex
France.
email : daniel.caro@math.unicaen.fr